

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ»

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО»

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені
М.П.ДРАГОМАНОВА

ІХ ВСЕУКРАЇНСЬКА КОНФЕРЕНЦІЯ
**СТУДЕНТІВ, АСПІРАНТІВ ТА
МОЛОДИХ
ВЧЕНИХ З МАТЕМАТИКИ**

10-11 Квітня 2020 р.

Зміст

1 Секція «Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь»	5
<i>В. В. Бовсунівська</i> Про тейлорівські коефіцієнти функцій з класу Гарді	6
<i>В. Ю. Богданський, О. І. Клесов</i> Узагальнення теореми Басса-Пайка про посилений закон великих чисел	7
<i>Т. О. Драбик</i> Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії	8
<i>Ю. В. Козаченко, М. Ю. Петранова</i> Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями	10
<i>О. В. Колеснік</i> Граничні теореми для F^α -схеми рекордів	11
<i>С. П. Лиховид</i> Поверхня максимумів спектральних щільностей МА(2)-процесів	12
<i>К. О. Новицький</i> Про зв'язок між двома сусідніми простими числами	14
<i>О. О. Пруходко</i> The limit behaviour of random walks with a sticky point	15
<i>О. В. Сальнікова</i> Процедура розтягнення лотерейної схеми індукції з умовою мінімізації кількості станів	16
<i>Є. І. Стрелець</i> Умова нескінченної малості для випадкових величин з трикутника Паскаля	17
<i>V. Shram</i> Divergence of multivector fields. Case of infinite dimension	18

<i>В. К. Юськович</i>	
Асимптотична поведінка розв'язків двовимірних стохастичних диференціальних рівнянь	19
2 Секція «Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу»	20
<i>Ю. П. Маслова, І. М. Лисенко</i>	
Група неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости G_2 -зображення чисел	21
<i>С. П. Ратушняк, М. В. Працьовитий</i>	
Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2 -зображення	22
3 Секція «Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики»	23
<i>К. Болюх</i>	
Моделювання стохастичних дифузійних процесів та процесів з «ринковим» часом	24
<i>Н. І. Заставний</i>	
Проблема інвестора в багатоперіодній моделі стосовно торгівлі цінними паперами	25
<i>N. G. Ichanska, I. S. Klimenko</i>	
Two-dimensional non-abelian Lie algebras of derivations	26
<i>A. С. Ковтун, О. І. Клесов</i>	
Альтернативне означення чисел Фібоначчі	27
<i>V. V. Marchenko, G. V. Kriukova</i>	
Speech enhancement with deep learning	28
<i>В. О. Петрук</i>	
Число форсування в нуль для родини графів шестерня	29
<i>Б. С. Пономарчук</i>	
Метрична розмірність прямого добутку метричних просторів	30
<i>A. O. Санжаровська</i>	
Автоматичне планування КПП	31

<i>А. П. Собченко</i>	
Про деякі методи знаходження проекції вектора на лінійний підпростір	32
<i>С. В. Тищенко, Н. Ю. Щестюк</i>	
Оцінювання опціонів на неповних ринках засобами стохастичної оптимізації	33
<i>П. Ю. Цімура, С. С. Дрінь</i>	
Моделювання та прогнозування інвестиційних витрат для літнього дитячого табору	34
<i>Н. У. Shchestyuk, А. М. Marchenko</i>	
Coherence of coupled oscillators for the case of financial time series	35
4 Секція «Методики навчання та історії математики »	37
<i>А. О. Дяченко, Л. А. Репета</i>	
Дослідження різних способів доведення нерівності Коші–Буняковського	38
<i>Є. І. Лемешко, С. С. Дрінь</i>	
Побудова математичної моделі для рекомендаційної системи підтримки навчального процесу	40

1 Секція «Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь»

Керівник: Клесов Олег Іванович

Про тейлорівські коефіцієнти функцій з класу Гарді

Національний технічний університет «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна.

Нехай $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – одиничний круг в комплексній площині і задано степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (1)$$

Означення. Через H^p , $1 \leq p < \infty$, позначимо множину функцій $f(z)$ регулярних в D і таких, що

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta =: H_p(f) < \infty.$$

Цю множину функцій називають класом Гарді.

Важливою задачею при вивченні граничних властивостей функцій $f(z)$ є встановлення умов на послідовність комплексних чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ при виконанні яких функція $f(z)$, задана рядом Тейлора (1), буде належати класу Гарді H^p , $1 \leq p < \infty$.

Добре відомо, що для того, щоб регулярна в D функція $f(z)$ належала класу H^2 необхідно і достатньо, щоб збігався ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$.

Справедливе таке твердження.

Теорема. *Нехай послідовність $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ задовольняє такі умови:*

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$,
- b) $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 c_k| < \infty$, $\Delta^2 c_k = c_k - 2c_{k+1} + c_{k+2}$.

Для того, щоб функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ належала класу H^1 необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty.$$

E-mail: ✉ bovsunovska@matan.kpi.ua.

Узагальнення теореми Басса-Пайка про посилений закон великих чисел

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Київ, Україна

У роботі [1] Р. Басс і Р. Пайк довели рівномірний закон великих чисел для випадкових величин, індексованих множинами. В цій доповіді наводиться узагальнення цього твердження і наслідки з цього узагальнення. Також доводиться твердження про рівномірну збіжність для процесів відновлення.

Нехай \mathcal{A} — деяка сукупність борелевських підмножин $(0, 1]^d$; При деяких умовах, накладенх на \mathcal{A} та X

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA)}{n^d} - \mu|A| \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

майже напевно, де μ — деяка випадкова величина, яка визначається в умові на X .

Підставляючи замість X різні випадкові заряди, можна отримати різні наслідки. Наприклад, X може породжуватись сумами незалежних однаково розподілених випадкових величин. В цьому випадку μ — це математичне сподівання цих випадкових величин.

Більше того, при деяких інших умовах

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{t}{(N_t(A))^d} - \mu|A| \right| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

майже напевно, де $N_t(A)$ — процес відновлення. Зауважимо, що умови для (2) є більш обтяжливими, ніж умови для (1).

- [1] R. F. Bass and R. Pyke. A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets. *Ann. Probab.*, **12**, (1984), 268–271.

E-mail: ✉¹hypostimpack@ukr.net, ✉²klesov@matan.kpi.ua.

Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Київ, Україна.

Розглянемо модель регресії $X_t = g(t, \theta) + \varepsilon_t, t \in \overline{1, T}$, де $g : \mathbb{N} \times \Theta_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція при будь-яких $t \geq 1$, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\| \leq 1} (\Theta + \gamma a)$, $\gamma > 0$ – деяке число, $\Theta \in \mathbb{R}^q$ – відкрита множина, що містить монотонно неспадну сім'ю відкритих опуклих множин $\{\Theta_T, T > T_0 > 0\}$, дійсне значення параметра $\theta \in \Theta_T, T > T_0$. Відносно шуму ε припустимо, що

1) $\varepsilon_t = G(\xi_t), t \in \mathbb{Z}$, де $G(x), x \in \mathbb{R}$, – борелева функція, причому $E\varepsilon_0 = 0, E\varepsilon_0^4 < \infty$.

2) $\xi_t, t \in \mathbb{Z}$, є гауссівським стаціонарним часовим рядом, $E\xi_0 = 0$, із коваріаційною функцією $B(t) = \sum_{j=0}^r A_j B_{\alpha_j \varkappa_j}(t), r \geq 0, t \in \mathbb{Z}$,
 $B_{\alpha_j \varkappa_j}(t) = \frac{\cos \varkappa_j t}{(1+t^2)^{\alpha_j/2}}, \alpha_j \in (0, 1), 0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r < \pi$,
 $\sum_{j=0}^r A_j = 1, A_j \geq 0$.

Розглянемо оцінку найменших квадратів (о.н.к.) невідомого параметра $\theta \in \Theta_T$, тобто випадковий вектор $\hat{\theta}_T \in \Theta_T^c$ такий, що мінімізує функціонал

$$Q_T(\tau) = \sum_{t=1}^T [X(t) - g(t, \tau)]^2.$$

Також розглянемо допоміжну лінійну регресійну модель

$$Z(t) = \sum_{i=1}^q \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta) \beta_i + \varepsilon_t, t \in \overline{1, T}.$$

У доповіді наведено умови на функцію регресії g , за яких було доведено, що для будь-якого $r > 0 \mathbb{P}\{\|\hat{\theta}_T - \tilde{\theta}_T\| > r\} \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$, де $\hat{\theta}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta) \in$ нормованою о.н.к. моделі регресії, $\tilde{\theta}_T = d_T(\theta)(\tilde{\beta}_T - \beta) \in$ нормованою о.н.к. допоміжної лінійної регресійної моделі.

Останнє співвідношення лінеаризації дозволяє отримати теорему про асимптотичну нормальність нормованої о.н.к. $\hat{\theta}_T$ параметрів тригонометричної функції регресії [1].

$$g(t, \theta) = \sum_{k=1}^N (A_k \cos \varphi_k t + B_k \sin \varphi_k t), t \in \mathbb{N},$$

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{3N-2}, \theta_{3N-1}, \theta_{3N}) = (A_1, B_1, \varphi_1, \dots, A_N, B_N, \varphi_N),$$

$$(A_k)^2 + (B_k)^2 > 0, k = \overline{1, N}, 0 \leq \underline{\varphi} < \varphi_1 < \dots < \varphi_N < \overline{\varphi} < \pi.$$

- [1] A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, and B.M. Zhurakovsky *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 49:1, 2015, 156–186.

E-mail: ✉ drabyk.tetyana@gmail.com.

**Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими
кореляційними функціями**

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

² Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна.

У роботі знайдено розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями. Описана поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності. Також знайдено розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріаційною функцією та описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

Означення 1. Нехай $0 < \alpha \leq 2$. Дійсний стаціонарний гауссів процес $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$, такий що

$$EX_\alpha(t) = 0, \quad \rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\{-d|h|^\alpha\},$$

$d > 0$ називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.

Теорема 1.

$$P \left\{ \sup_{t \in [a,b]} |X(t)| > \epsilon \right\} \leq C \exp \left\{ -\frac{\epsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2} \right\},$$

$$C = 2^{1/\beta-1} \left(\frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha} \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)^{1/\beta}} + 1 \right)$$

- [1] *Buldygin V.V.* Metric characterization of random variables and random processes. (Transl. from the Russian) // V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. - Translations of Mathematical Monographs. 188. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, 2000. - 257p.
- [2] *Kozachenko Yu., Petranova M.* Proper complex random processes // Stat., Optim. Inf. Comput. - 2017. -v. 5. -p. 137-146.

E-mail: ✉¹author_yvk@univ.kiev.ua, ✉²author_m.petranova@donnu.edu.ua.

Граничні теореми для F^α -схеми рекордів

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського”, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Київ, Україна

Нехай $\{X_k, k \geq 1\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, $\alpha = \{\alpha_k, k \geq 1\}$ — додатні дійсні числа, F — неперервна функція розподілу. Припустимо, що розподіли випадкових величин X_k такі, що:

$$P(X_k < x) = F^{\alpha_k}(x).$$

Така послідовність випадкових величин називається F^α -схемою.

Для даної послідовності $\{X_k\}$ визначимо поняття моменту n -го рекорду $L(n)$ та кількості рекордів $\mu(n)$ до моменту n включно. Покладемо $L(1) = 1$ та

$$L(n) := \inf\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\},$$

$$\mu(n) := \#\{k : L(k) \leq n\}.$$

Позначимо $A_n := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Накладаючи різні умови на зростання A_n можна отримати асимптотичні результати для $\mu(n)$ та $L(n)$. Наприклад, якщо $\alpha_n = o(A_n)$, то майже напевно [2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\log(A_n)} = 1.$$

У даній роботі буде розглянуто інші умови на зростання A_n при яких існують нетривіальні границі. Одна з таких умов:

$$C_1 n^\theta < A_n < C_2 n^\theta$$

для деяких констант $C_1 < C_2$ та $\theta > 0$. Такий характер зміни називається ORV [1].

[1] V. V. Buldygin, K.-H. Indlekofer, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes, Springer, Berlin, 2018.

[2] P. Doukhan, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, Strong Laws of Large Numbers in an F^α -Scheme, In: Mathematical Statistics and Limit Theorems, Festschrift in Honour of Paul Deheuvels (Eds.: M. Hallin, D.M. Mason, D. Pfeifer, J.G. Steinebach), pp. 287–303, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

С. П. Лиховид

Поверхня максимумів спектральних щільностей МА(2)-процесів

КПШ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна.

Розглянемо МА(2)-процес

$$\varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} = \xi_t \quad (1)$$

де, $\{\xi_t, t \in \mathbf{Z}\}$ — дискретний білий шум, $E\xi_t = 0$, $E\xi_t^2 = \sigma_\xi^2$.

Теорема 1. Область оборотності МА(2)-процесу (1) задано множиною:

$$S_0 = \{(b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2 : b_1 + b_2 > -1, b_1 - b_2 < 1, b_2 < 1\}. \quad (2)$$

Спектральна щільність МА(2)-процесу задається наступною рівністю:

$$f(\lambda, b_1, b_2) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} |b(e^{i\lambda})|^2, \lambda \in [-\pi; \pi], \quad (3)$$

де, $b(z) = 1 + b_1z + b_2z^2$,

$$|b(e^{-i\lambda})| = 1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1 + b_2)\cos\lambda + 2b_2\cos 2\lambda = B(\lambda, b_1, b_2) \quad (4)$$

Умовний максимум функції (4), як функції від λ , за умови, що параметри b_1, b_2 знаходяться у множині (2) утворюється:

- 1) в області $S_1 = \{b_1 > 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1+4}\}$ в точці $\lambda = 0$,
та дорівнює $B_0(0) = (1 + b_1 + b_2)^2$;
- 2) в області $S_2 = \{b_1 < 0, b_2 > -\frac{b_1}{b_1-4}\}$ в точці $\lambda = \pi$,
та дорівнює $B_0(\pi) = (1 - b_1 + b_2)^2$;
- 3) в області $S_3 = \{b_2 < -\frac{b_1}{b_1+4}, b_2 < -\frac{b_1}{b_1-4}\}$ в точці $\lambda_0 = \arccos -\frac{b_1(1+b_1)}{4b_2}$, та дорівнює $B_0(\lambda_0) = (1 - b_2)^2(1 - \frac{b_1^2}{4b_2})^2$.

Цей результат використовується для отримання ймовірності великих відхилень оцінки наменших квадратів параметра нелінійної функції регресії із випадковим шумом, який є $MA(2)$ -процесом.

Аналогічний результат для $AR(2)$ -процесу отриманий в роботі [1].

- [1] О. В. Іванов, Н. В. Карпова *Поверхня максимумів спектральної щільності $AR(2)$ -процесів та її застосування в статистиці часових рядів*, Наукові вісті НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017, 4 (114), 39–46.

E-mail: ✉ lsp1896@gmail.com.

Про зв'язок між двома сусідніми простими числами

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського”, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Київ, Україна

Розглядається задача про пошук зв'язку між двома сусідніми простими числами. Це одна із багатьох задач, пов'язаних з множиною простих чисел. Вже багато століть математики всього світу створюють загальну теорію, яка б повністю описувала структуру цієї множини. Найбільші досягнення в даній області належать К.Ф. Гауссу, Г.Б. Ріману, Ж.-С. Адамару, П.Л. Чебишеву, Ш.Ж. Валле-Пуссену та ще багатьом великим вченим.

В ході проведеної роботи був отриманий наступний результат: для довільної пари $(P_n; P_{n+1})$ сусідніх простих чисел завжди існують лінійні функції $\varphi(t)$ та $\omega(t)$ від цілого аргументу t , які дозволяють виразити P_{n+1} через P_n наступним чином:

$$P_{n+1} = \frac{2 + P_n * \varphi(t)}{\omega(t)}, \quad t \in Z.$$

Отже, проаналізувавши отриманий результат, можна стверджувати, що певний зв'язок між сусідніми простими числами був знайдений: довільне просте число виражається через попереднє йому просте за допомогою двох лінійних функцій. Причому права частина рівності залишається незмінною при підстановці будь-якого цілого t . Також треба зазначити, що для різних пар сусідніх простих чисел дані функції будуть мати різні коефіцієнти при t та різні вільні члени. Тобто для конкретної обраної пари сусідніх простих, зазначені лінійні функції будуть мати конкретні числові параметри.

- [1] Д.А. Граве, Елементарний курс теорії чисел: Вид.2-е.— Москва:URSS,сop.2017.—240с.
- [2] И. Г. Башмакова, Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972. 68 с.
- [3] Виноградов И. М. Основы теории чисел: Учебное пособие. — 12-е изд. — СПб.: Лань, 2009.
- [4] Гильфорд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. — М.: Наука, 1983. — 64 с.

E-mail: ✉ kirill123novitskiy@gmail.com.

O. O. Prykhodko

The limit behaviour of random walks with a sticky point

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”.

Let $\tilde{S}(n)$ be a random walk which is driven as a symmetric random walk everywhere except for the point 0. Upon hitting 0 the random walk is arrested there for a random amount of time $\eta_i \geq 0$ (i.i.d.); and then continues its way as usual. We study the limit behaviour of this process scaled as in the Donsker theorem. In case of $\mathbb{E}\eta_i < \infty$, the convergence towards a Wiener process is proved. We also consider a sequence of processes whose arrest times are geometrically distributed and grow with n . We prove that the possible limit for the last model is one of the following: a Wiener process, a Wiener process stopped at 0 and a Wiener process with a sticky point.

E-mail: ✉ o.prykhodko@yahoo.com.

Процедура розтягнення лотерейної схеми індукції з умовою мінімізації кількості станів

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Будь-яке рішення $x \in X$ в системі рішень спричиняє деякий невизначений єдиний наслідок u з множини можливих $U_x \subseteq U$. Виділяють два види СПР : параметрична та непараметрична. Їм відповідають дві моделі: матрична та лотерейна.

В даних тезах розглядається процедура розтягнення лотерейної схеми. Відомо, що різні матричні схеми можуть проектуватись в одну і ту саму лотерейну. Отже було поставлене завдання описати алгоритм, що дозволяє розтягнути лотерейну схему в відповідну їй матричну з умовою мінімальної кількості параметрів.

Для довільної схеми

$\tilde{M} = \langle X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, U = \{u_1, \dots, u_m\}, R, \{P_{x_1}, P_{x_2}, \dots, P_{x_n}\} \rangle$
при загальноприйнятому алгоритму розтягнення отримаємо схему з $m \times n$ кількістю параметрів. Запропонований алгоритм базується на тому, щоб розбити множину R на несумісні підмножини з однаковою сумою елементів, і в межах даних підмножин застосувати алгоритм побудови шляхів, що був розроблений мною під час написання курсової роботи на цю тему. В межах однієї підмножини кількість шляхів буде $n + m - 1$. Саме така ідея виникла після розгляду задачі з двома рішеннями, та представлення її у вигляді транспортної задачі. Оскільки у виродженому опорному плані транспортної задачі ненульових елементів менше ніж $n + m - 1$, то постало як в нашому випадку досягти даної виродженості. І відповідь виявилась доволі очевидною, треба розбити ,якщо можливо, дану задачу на закриті підзадачі. Тоді в кожній окремій підзадачі ми отримаємо $n' + m' - 1$ елементів. І для зведеної задачі кількість елементів буде сумою елементів в підзадачах, що в свою чергу дорівнює $\sum_{i=1}^k n' + m' - 1$, де k - це кількість підзадач, $\sum n' = n$, $\sum m' = m$, тож отримаємо $n + m - k$ елементів.

Також даний алгоритм можна використовувати в різних прикладних задачах пов'язаних з необхідністю організації мінімальної кількості сполучень. Таких задач як, наприклад, побудова водяних шляхів містом, з'єднання електростанцій та багато інших.

E-mail: ✉ salnikova.olia@gmail.com.

Є. І. Стрелець

Умова нескінченної малості для випадкових величин з трикутника Паскаля

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського”, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Київ, Україна

Розглянемо трикутник Паскаля, який утворюється за таким правилом: на його бічних лініях розташовано незалежні у сукупності випадкові величини Радемахера $X_{n,0}$ та $X_{n,n}$, $n \geq 1$, тобто

$$X_{n,0} \sim X_{n,n} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

а правило утворення інших значень $\{X_{n,j}, 0 < j < n\}$ є класичним:

$$X_{n,j} = X_{n-1,j-1} + X_{n-1,j+1}.$$

Позначимо через S_n суму елементів, які розташовано на рядках з номерами від 1 до n .

Твердження 1.

$$S_n = X_{n,1} + X_{n,n} + X_{n-1,1} + X_{n-1,n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} 2^{k-1} (X_{n-k,1} + X_{n-k,n-k})$$

Задача полягає у вивченні граничних властивостей сум S_n , наприклад, визначити граничний розподіл при $n \rightarrow \infty$. Класичну теорію граничних розподілів розвинуто у припущенні, що випадкові величини, які утворюють суми S_n , є нескінченно малими [1].

Твердження 2. Позначимо $Y_{n,k} = 2^{k-1} (X_{n-k,1} + X_{n-k,n-k})$. Тоді умова нескінченної малості не виконується для серії випадкових величин $\{Y_{n,k}\}$.

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров “Пределные распределения для сумм независимых случайных величин”, М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. — 264 с.

E-mail: ✉ evgeniastrelets@gmail.com.

Divergence of multivector fields. Case of infinite dimension

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

Let \mathcal{M} be a smooth orientable manifold of dimension n , and let the sets of (smooth) k -vector fields and (smooth) k -differential forms on \mathcal{M} be denoted by $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M})$ and $\Omega^k(\mathcal{M})$, respectively.

A choice of nowhere-vanishing volume form $\omega \in \Omega^n(\mathcal{M})$ gives rise to a divergence operator $\text{div} : \mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}^{k-1}(\mathcal{M})$, defined as a Hodge dual to the exterior derivative. Namely, $\text{div} := (-1)^{n(k+1)+1} H'_\omega \circ d \circ H_\omega$, so that the diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{n-k}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{d} & \Omega^{n-k+1}(\mathcal{M}) \\
 H_\omega \uparrow & & \downarrow H'_\omega \\
 \mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) & \xrightarrow{(-1)^{n(k+1)+1} \text{div}} & \mathfrak{X}^{k-1}(\mathcal{M})
 \end{array}$$

commutes (see, for example [1]).

This construction, however, does not allow direct generalisation to the case, when the manifold \mathcal{M} has infinite dimension, because in this case one does not have a notion of a volume form.

In this talk we present an alternative construction of divergence operator on multivector fields, which is consistent with the one described above, and viable in both finite- and infinite-dimensional cases. We also discuss some of the properties which this operator satisfies.

[1] N. Broojerdian, E. Peyghan, A. Heydari, Differentiation along multivector fields, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, Vol. 6, No. 1, pp. 79–96, 2011.

E-mail: ✉ shram.vladyslav@gmail.com.

В. К. Юськович

**Асимптотична поведінка розв'язків двовимірних
стохастичних диференціальних рівнянь**

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», Київ, Україна.

Розглянемо двовимірне стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned}dX_1(t) &= a_1(X_1(t), X_2(t))dt + dW_1(t), X_1(0) = x_{01}, \\dX_2(t) &= a_2(X_1(t), X_2(t))dt + dW_2(t), X_2(0) = x_{02},\end{aligned}$$

яке задовольняє умови існування та єдиності розв'язку. Позначимо через $R(t)$, $\Phi(t)$ відповідно радіус і кут розв'язку у полярній системі координат.

Ми розв'язуємо наступні дві задачі.

Задача 1. Дослідити умови, за яких майже напевно радіус розв'язку прямує до нескінченності, а кут – стабілізується:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) =: \Phi(\infty).$$

Задача 2. Нехай радіус розв'язку задовольняє СДР

$$dR(t) = \mu(R(t), \Phi(t))dt + \sigma(R(t), \Phi(t))d\tilde{W}_1(t), R(0) = r_0.$$

Розглянемо відповідне звичайне диференціальне рівняння, у якому відсутня стохастична частина та $\Phi(t)$ замінено на $\Phi(\infty)$:

$$dr(t) = \mu(r(t), \Phi(\infty))dt, r(0) = r_0.$$

Дослідити умови, за яких майже напевно розв'язок СДР еквівалентний на нескінченності до розв'язку відповідного ЗДР:

$$R(t) \sim r(t), t \rightarrow \infty.$$

E-mail: ✉ viktyusk@gmail.com.

2 Секція «Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу»

Керівник: Працьовитий Микола Вікторович

Група неперервних перетворень відрізка, які зберігають хвости G_2 -зображення чисел

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна.

Розглядається двоосновне зображення чисел відрізка $[0; g_0]$, яке ґрунтується на розкладах чисел в ряди з використанням двох основ $g_0 < 1$ і $g_1 \equiv g_0 - 1$, а саме:

$$[0; g_0] \ni x = \alpha_1 g_1 - \alpha_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k g_1 - \alpha_k \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2}.$$

Кажуть, що G_2 -зображення дійсних чисел $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ і $y = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{G_2}$ мають однаковий хвіст, якщо існують такі натуральні k і m , що $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$. Символічно це позначається $x \sim y$.

Кажуть, що перетворення f відрізка $[0; g_0]$ (бієктивне відображення відрізка на себе) зберігає хвости G_2 -зображення чисел, якщо будь-яке число $x \in [0; g_0]$ і $y = f(x)$ мають однаковий хвіст.

Прикладом неперервного перетворення, що зберігає хвости G_2 -зображення чисел, є спадна функція

$$f_1(x) = \begin{cases} \tau_1(x) & \text{при } x \leq x_1 = \Delta_{(1)}^{G_2} = \frac{g_0}{2 - g_0}, \\ \omega(x) & \text{при } x \geq x_1 = \Delta_{(1)}^{G_2} = \frac{g_0}{2 - g_0}, \end{cases}$$

де $\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}$ — оператор лівостороннього зсуву цифр, а $\tau_1(x) = \tau_1(\Delta_{\alpha_1(x) \dots \alpha_n(x) \dots}^{G_2}) = \Delta_{1\alpha_1(x) \dots \alpha_n(x) \dots}^{G_2}$ — оператор правостороннього зсуву цифр з параметром 1.

Теорема 1. Множина \mathcal{C} всіх неперервних бієкцій відрізка $[0; g_0]$, які зберігають хвости G_2 -зображення чисел, відносно операції \circ — "композиція" (суперпозиція), утворює нескінченну некомутативну групу, нетривіальну підгрупу якої утворюють зростаючі функції.

- [1] Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: ІМ НАН України, 2019., т 16, № 2. — С. 50-62.

E-mail: ✉¹ julia0609mas@gmail.com, ✉² iryna.pratsiovyta@gmail.com.

**Неперервна ніде не диференційовна функція з
фрактальними властивостями, визначена в термінах
 Q_2 -зображення**

НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України, Київ, Україна.

Нехай $A_2 \equiv \{0, 1\}$ – алфавіт, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту; $0 < q_0 < 1$, $q_1 \equiv 1 - q_0$. Як відомо (*Працевитий Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2 -символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С.92–102.*): для $\forall x \in [0; 1]$ існує $(\alpha_n) \in L_2$:

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}, \quad (1)$$

$\beta_{\alpha_k} = \alpha_k q_{1-\alpha_k}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Ряд (1) називається Q_2 -представленням числа x , а формальний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$ – Q_s -зображенням ряду (1) і числа x . Розглядається функція r , означена рівністю $r(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k} \dots}^{Q_2}) = \Delta_{r_1 r_2 \dots r_k \dots}^{Q_2}$, де

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0), \\ 1, & \text{якщо } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), \end{cases}$$

$$r_k = \begin{cases} r_{k-1}, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ 1 - r_{k-1}, & \text{якщо } (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}). \end{cases}$$

Теорема 1. *Функція r є неперервною ніде не монотонною функцією необмеженої варіації, множиною значень якої є відрізок $[0; 1]$.*

Теорема 2. *Кожна множина Q_2 -унарного рівня функції r є континуальною ніде не щільною фрактальною множиною нульової міри Лебега, а Q_2 -бінарного рівня – скінченною.*

Теорема 3. *Точки, які є Q_2 -бінарними або Q_2 -унарними точками екстремумів є точками недиференційовності функції r . Якщо $q_0 \geq q_1^2$ і $q_1 \geq q_0^2$, то функція r є ніде не диференційовною.*

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, автомобельних та інтегральних властивостей функцій, зокрема, уточнення теореми 2, а також розподілу значень функції r при заданому розподілі аргумента.

E-mail: ✉¹ratush404@gmail.com, ✉²prats4444@gmail.com.

3 Секція «Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики»

Керівник: Олійник Богдана Віталіївна

К. Болюх

Моделювання стохастичних дифузійних процесів та процесів з «ринковим» часом

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

В фінансовій математиці випадковість є доміантним критерієм, який визначає саму сутність ринку. В цьому випадку стохастичність, як і броунівський рух є не просто поправкою, а головним наближенням до реального процесу. Тобто, можна сказати, що наш світ є не детермінованим, а скоріше ймовірнісним. Звичайне диференціальне рівняння є лише першим наближенням до опису реальних процесів. Наступний крок – це стохастичні рівняння. В цій роботі розглядатиметься математичний апарат, що дозволяє поєднати детерміновану, гладку динаміку та стрибкоподібні, ломані випадкові процеси. Для симуляції стохастичних процесів було використано ітераційну схему [1, с.49]:

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k)\Delta t + b(x_k, t_k)\sqrt{(\Delta t)}\varepsilon_k,$$

де ε_k кожного разу нове згенероване з нормальним розподілом випадкове число.

Далі досліджено засоби мов програмування для генерування випадкових чисел (рівномірно розподілених, нормально розподілених). Здійснено моделювання (симуляцію) стохастичних дифузійних процесів; розраховано похибки обчислень та прискорення збіжності, схеми Ейлера та Мілстейна. На наступному етапі було змодельовано дифузійні процеси із заданою функцією розподілу, а саме з оберненим гама розподілом [3]. Заключним етапом стало моделювання цін акцій із новим «ринковим» часом, природи яких є дифузійним процесом з оберненим гама розподілом [4].

- [1] Степанов С. С. Стохастический мир [Електронний ресурс] / Сергій Станіславович Степанов. – 2009. – Режим доступу до ресурсу: <http://synset.com/pdf/ito.pdf>.
- [2] Ширяев А. М. Основи стохастичної фінансової математики / Альберт Миколайович Ширяев. – Москва: Фазис, 2016. – 440 с.
- [3] Bibby B. M. Diffusion-Type Models with given Marginal Distribution and Autocorrelation Function : DK-1871 / Bibby B. Martin – Frederiksberg, Denmark. – 30 с.
- [4] Щестюк Н. Ю. Справедлива ціна європейських опціонів для гамма-обернених дифузійних моделей ціноутворення акцій : спец. УДК 519.1 / Щестюк Н. Ю. – Київ, 2013. – 4 с.

E-mail: ✉ k.bolyukh@ukma.edu.ua.

Н. І. Заставний

Проблема інвестора в багатоперіодній моделі стосовно торгівлі цінними паперами

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Проблеми обчислення і управлінням ризиком є особливо актуальними в період кризових явищ. Щоб збільшити шанси прибутку і зменшити ризик потрібно розв'язати деяку оптимізаційну задачу.

В даній роботі розглядається багатоперіодна задача інвестора для прийняття рішень при інвестуванні у якийсь вид ризикованих активів.

Основна мета роботи полягає у написанні алгоритму для задачі прийняття рішень в багатоперіодичній моделі. А також, проаналізувати його, тобто провести дослідження наскільки ризиковим є метод і який дає прибуток. Формальна постановка задачі для багатоперіодичної моделі [1]:

Нехай вкладення інвестора в період t : X_t , а результат задається як випадкова величина Y_t .

Тоді формули для можливого дефіциту або прибутку:

$$K_t = [l_{t-1}K_{t-1} + Y_t - X_{t-1}]^+$$

$$M_t = [l_{t-1}K_{t-1} + Y_t - X_{t-1}]^-$$

Коефіцієнти нарощення і дисконтування:

$$u_t = 1 + r_t \quad l_t = \frac{1}{u_t}$$

Потрібно максимізувати H - дохід з урахуванням ризику:

$$H(X_0, Y_1, \dots, X_{T-1}, Y_T) = \sum_{t=1}^T (X_{t-1} - u_t M_t) + l_t K_T.$$

Виявляється, що задача розв'язується в термінах багатоперіодного $V @ R$.

Результати роботи ілюструються на реальних даних компанії Amazon.

- [1] Georg Ch Pflug, Werner Römisch. Modeling, Measuring And Managing a Risk, 2007.

E-mail: ✉ nazarzastavnyi@gmail.com.

Two-dimensional non-abelian Lie algebras of derivations

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine.

Darboux polynomials are analogues of eigenvectors for derivations on polynomial rings, they are widely used in differential algebra and in theory of differential equations. Let K be a field of characteristic zero and $A = K[x_1, \dots, x_n]$ the polynomial ring in n variables. Recall that a K -linear mapping $D : A \rightarrow A$ is called a K -derivation if $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ for any $f, g \in A$. A polynomial $h \in A$ is called a Darboux polynomial for D if $D(h) = \lambda h$ for some polynomial $\lambda \in A$. There are many papers devoted to Darboux polynomials, see for example, [1], [2]. We use such polynomials to characterize two-dimensional non-abelian Lie algebras of derivations. Denote by $W_2(K)$ the Lie algebra of all K -derivations on the polynomial ring $K[x_1, x_2]$. Recall that the divergence of a derivation $D = a(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ is the polynomial $\frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2}$. There is a wide class of derivations with zero divergence, namely jacobian derivations: if $u \in A$, then the mapping $D_u : A \rightarrow A$ defined by the rule $D_u(h) = \det J(u, h)$ where $J(u, h)$ is the Jacobi matrix of polynomials u and h is called the jacobian derivation induced by the polynomial u . The next statement gives a characterization of two-dimensional subalgebras of the Lie algebra $W_2(K)$.

Theorem 1. *Let $D_1, D_2 \in W_2(K)$ satisfy the relation $[D_1, D_2] = D_2$. Then either D_1 and D_2 have a common Darboux polynomial or $D_1 = D_u$ is a jacobian derivation for a polynomial u and D_2 has a constant divergence.*

- [1] Nowicki A., Polynomial Derivations and their Rings of Constants, Torun, Uniwersytet Mikolajja Kopernika, 1994.
- [2] Petravchuk A. P., On pairs of commuting derivations of the polynomial ring in one or two variables, Linear Algebra and its Applications, v.433 (2010), P.574-579.

E-mail: ✉¹author_ichanadia235@gmail.com, ✉²author_ihorklim93@gmail.com.

Альтернативне означення чисел Фібоначчі

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Київ, Україна

Означення 1. Числа F_n , $n \geq 0$, називаються числами Фібоначчі, якщо

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Серед багатьох визначних властивостей числа Фібоначчі мають одну, яка пов’язана з алгоритмом Евкліда знаходження остачі від ділення одного цілого числа на інше.

Нехай $a < b$, $a \neq 0$, два цілих числа. Позначимо через $k(a, b)$ кількість кроків, необхідних алгоритму Евкліда, щоб визначити остачу від ділення b на a .

Означення 2. Послідовність $\{F_n, n \geq 0\}$, $F_0 = 0$, називається послідовністю Фібоначчі, якщо для кожного $n \geq 0$ пара F_{n+1} і F_{n+2} є найменшою з усіх пар $a, b \in \mathbb{N}$ таких, що $k(a, b) = n$.

Еквівалентність означень 1 та 2 впливає з наступного результату.

Твердження 1. *Нехай $n \geq 0$. Тоді найменшою парою чисел a і b , для яких $k(a, b) = n$ є F_{n+1} і F_{n+2} , де F_{n+1} і F_{n+2} — два послідовних числа Фібоначчі згідно означення 1.*

E-mail: ✉¹0nkovtun0@gmail.com, ✉²klesov@matan.kpi.ua.

Speech enhancement with deep learning

National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine

Various video and Voice Over IP (VoIP) applications are widely used nowadays, and due to background noise, hardware or software issues, audio degradation may occur. We aim to estimate and improve quality of audio records. Now we focus on offline algorithm, when the record is given as wav-file, whereas development of online algorithm or adaptation of offline algorithm to online case is in our further plans.

In the talk we consider the process of denoising for speech signals using deep networks architecture. Given input audio record containing speech corrupted by an additive background signal, the system aims to produce a processed signal that contains only the speech content.

We solve the problem by means of a fully-convolutional context aggregation network using a deep feature loss [1]. That loss is based on comparing the internal feature activations in a different network, trained for acoustic environment detection and domestic audio tagging. We compare the performance with another recent deep learning approach [2].

Assessment of audio quality is another problem, as “speech quality” is rather subjective concept. One widely used metric for audio quality is the Mean Opinion Score (MOS), i.e. the arithmetical mean of individual ratings given by different users. Using the TCD-VoIP dataset [3], the regression model is built for estimation of MOS for audio record in .wav format.

- [1] Germain, F.G., Chen, Q., Koltun, V. (2019) *Speech Denoising with Deep Feature Losses*. Proc. Interspeech 2019, 2723-2727, DOI: 10.21437/Interspeech.2019-1924.
- [2] Michelashvili, M., Wolf, L. (2019) *Audio Denoising with Deep Network Priors*. arXiv preprint arXiv:1904.07612.
- [3] N. Harte, E. Gillen, A. Hines. (2015) *TCD-VoIP, a Research Database of Degraded Speech for Assessing Quality in VoIP Applications*. In Quality of Multimedia Experience (QoMEX), Seventh International Workshop on, Costa Navarino, Greece. <http://www.mee.tcd.ie/sigmedia/Resources/TCD-VoIP>.

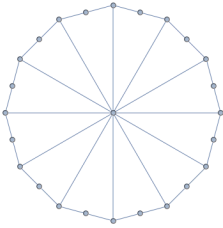
E-mail: ✉¹vit.marchenko@ukma.edu.ua, ✉²kriukovagv@ukma.edu.ua.

В. О. Петрук

Число форсування в нуль для родини графів шестерня

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Означення 1. Числом форсування в нуль $Z(G)$ графа G є мінімальна потужність множини чорних вершин S (всі інші вершини графа визначають білими), необхідних, аби перетворити усі вершини графа $V(G)$ на чорні за скінченну кількість кроків із застосуванням «правила зміни кольору»: біла вершина перетворюється на чорну за умови, якщо вона є єдиним білим сусідом чорної вершини.



Граф-шестерня (або Gear Graph) — це граф, що містить цикл порядку $2n$, кожна друга вершина якого з'єднана із ще однією в центрі.

Граф-шестерню позначають $W_{2,n}$. Він має $2n + 1$ вершину і $3n$ ребер.

Теорема 1. Для графа-шестерні

$$Z(W_{2,n}) = 3.$$

- [1] Linda EROH, Cong X. KANG and Eunjeong YI. *A Comparison between the Metric Dimension and Zero Forcing Number of Trees and Unicyclic Graphs* // Acta Mathematica Sinica, English Series Jun., 2017, Vol. 33, No. 6, pp. 731–747.
- [2] Avi Berman, ShmuelFriedland, LeslieHogben, Uriel G.Rothblum, BryanShader. *An upper bound for the minimum rank of a graph* // Linear Algebra and its Applications Volume 429, Issue 7, 1 October 2008, Pages 1629-1638.

E-mail: ✉ v.petruk@ukma.edu.ua.

Б. С. Пономарчук

Метрична розмірність прямого добутку метричних просторів

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Нехай (X, d) — метричний простір. Кажуть, що непорожня підмножина A множини X розділяє точки простору (X, d) якщо для довільних різних точок x і y простору X існує така точка $a \in A$, що виконується нерівність $d(x, a) \neq d(y, a)$. Точки цієї підмножини A називаються *розділяючими*. Метричною розмірністю $md(X)$ метричного простору (X, d) називають потужність мінімальної за відношенням включення множини B з усіх розділяючих підмножин множини X , а сама така підмножина B називається *метричним базисом* метричного простору (X, d) (див. [1]).

Прямим добутком метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) називається метричний простір визначений на множині $X \times Y$ та заданою на ній аступною метрикою (див. [2]):

$$1. \quad d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Теорема 1. *Нехай X — деякий метричний простір, всі значення метрики в якому попарно різні, а Y — скінченний еквідистантний метричний простір, $|Y| = m \geq 4$. Тоді для метричного простору $(X \times Y, d_1)$ виконується рівність*

$$md(X \times Y, d_1) = md(Y) = m - 1.$$

Теорема 2. *Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, то метрична розмірність прямого добутку цих просторів дорівнює*

$$md(X \times Y, d_1) = md(X) + md(Y).$$

[1] Heydarpour M., Maghsoudi S. *The metric dimension of geometric spaces // Topology and its Applications*, 2014, 178, P.230–235.

[2] Searcoid M. *Metric Spaces // Springer Undergraduate Mathematics Series*, London, 2007.

E-mail: ✉ ponomarchuk.bogdan@gmail.com.

А. О. Санжаровська

Автоматичне планування КПП

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Розглянемо модель, основними сутностями якої є:

- актор (з атрибутами ідентифікатор, прізвище, ім'я, по-батькові, професіоналізм, телефон 1, телефон 2, e-mail);
- персонаж (з атрибутами ідентифікатор, назва, тип ролі, стать);
- сцена (з атрибутами ідентифікатор, серія, номер, сценарний день, режим, запланований хронометраж, короткий зміст сцени, час зйомки);
- об'єкт (з атрибутами ідентифікатор, назва, тип, декорація, коментар);
- місце (з атрибутами ідентифікатор, назва, місто, адреса).

Сутності логічно пов'язані наступним чином: актор грає персонажа, персонаж задіяний у сцені, сцена відбувається на об'єкті, об'єкт розташований на місці.

Розглядається задача оптимального формування календарно-постановного плану зйомок фільму або серіалу. Нехай дано діапазон дат, протягом якого відбуватимуться зйомки. Необхідно розподілити всі сцени між датами таким чином, щоб:

- сцена знімалася в той день, коли актори, що грають персонажів, задіяних у сцені, вільні;
- сцена знімалася в той день, коли місце, де розташований об'єкт, на якому відбувається сцена, доступне;
- загальна тривалість знімальної зміни не перевищувала 12 годин;
- було враховано технічні перерви (обід, перестановки, переїзди, репетиції тощо);
- підряд було зайнято не більше шести днів.

Початковий розв'язок даної задачі формується шляхом групування сцен за об'єктами та розподілення по дням з урахуванням тривалості знімальної зміни. Далі задачу можна розв'язати за допомогою мета-алгоритму, що містить елементи генетичного алгоритму та алгоритму розв'язання транспортної задачі.

E-mail: ✉ aastasuhan@gmail.com.

С. В. Тищенко¹, Н. Ю. Шестюк²

Оцінювання опціонів на неповних ринках засобами стохастичної оптимізації

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Після досвіду фінансового цунамі 2008 року та в умовах теперішньої кризи контроль ризику похідних інструментів на фінансових ринках набув надзвичайно важливого значення; зокрема, на перший план виходить дослідження зв'язку між оптимальним інвестуванням у деривативи (з точки зору максимізації прибутку) та управлінням і обчисленням ризику такого інвестування. Модель Блека-Шоулза, яка оцінює справедливу ціну опціону добре працює лише як перше наближення і в умовах міжкризових явищ, коли один із її параметрів — волатильність дійсно можна вважати константою.

За умови криз та в умовах неповних ринків ми можемо запропонувати новий підхід для оцінювання опціонів, який базується на розв'язанні проблеми інвестора (див. Pflug G). Розв'язком цієї проблеми буде $VaR(Y)$ для певного рівня α де Y — це функція розподілу виплат для опціону $Y = (S - K)^+$, а α визначається через ринкові процентні ставки на депозит і на кредит і характеризує рівень економічного середовища. В роботі на реальних даних знайдено оптимальну (з точки зору максимізації прибутку і мінімізації ризику) оцінку опціону для випадків, коли інтегральний розподіл платіжної функції для знаходження α квантиля знаходиться з історичної гістограми, а також для випадку, коли розглянуті припущення, що розподіл Y є логнормальним (модель з геометричним броунівським рухом) і лог розподілом Стьюдента (модель з фрактальним активним часом).

- [1] Linda EROH, Cong X. KANG and Eunjeong YI. *A Comparison between the Metric Dimension and Zero Forcing Number of Trees and Unicyclic Graphs* // Acta Mathematica Sinica, English Series Jun., 2017, Vol. 33, No. 6, pp. 731–747.
- [2] Avi Bermana, ShmuelFriedland, LeslieHogben, Uriel G.Rothblum, BryanShader. *An upper bound for the minimum rank of a graph* // Linear Algebra and its Applications Volume 429, Issue 7, 1 October 2008, Pages 1629-1638.

E-mail: ✉¹s.tyshchenko@ukma.edu.ua, ✉²n.shchesteiuk@ukma.edu.ua.

П. Ю. Цімура¹, С. С. Дрін²

Моделювання та прогнозування інвестиційних витрат для літнього дитячого табору

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Дитячі табори — мало досліджена та вцілому не сильно розвинена ніша українського бізнесу в сфері послуг.

Основною мотивацією для обрання саме такої теми стало те, що я тривалий час був волонтером таборі високої якості, що позиціонував себе як неприбуткова організація. Проте, через кризу районного масштабу в організації почались фінансові проблеми, що змусило звернутись до фандрейзингу задля підтримки діяльності табору. Метою роботи була практична розробка фінансової моделі для цього табору, що дасть змогу належним чином скоригувати внутрішню роботу і спрогнозувати залучення інвестицій для того, щоб повністю позбутися залежності від фандрейзингу та зробити проєкт прибутковим.

В ході роботи було розглянуто декілька варіантів фінансових математичних моделей та побудовано власну модель на наступний рік базуючись на реальних фінансових даних організації за минулі роки, а також зважаючи на специфіку даного ринку.

Як і планувалось, робота вийшла більш дослідницько-практичною, ніж теоретичною. Результат роботи буде прикладним для конкретного табору, проте також може надати загальну інформацію про модель організації дитячого табору як прибуткового проєкту для охочих вести діяльність в цій мало зайнятій ніші сфери послуг.

E-mail: ✉¹paultsimura@gmail.com, ✉²svitlana.drin@gmail.com.

Coherence of coupled oscillators for the case of financial time series

National University of "Kyiv-Mohyla Academy", Kyiv, Ukraine.

The analysis in natural science leads to spreading the ideas of chaos theory and nonlinear dynamics to financial mathematics and creating the new researches to consider similar models and procedures for financial time series. Also, the irregular fluctuations in these series are sometimes considered as an outcome from chaotic systems.[1] This can be used, for example, to forecast the value of an investment portfolio, which is the combination of different financial assets, for example, stocks, bonds, cash. One of the ways to think about a successful portfolio is when the chosen equities have the high expected returns and synchronized in time for bottom moments.[2] Then the dynamics of these financial assets can be described as oscillators connected in the network.

In order to have the chaotic approach of modelling financial data was considered to create the oscillator which is the combination of 1-st order autoregression and logistic map, and not the white noise. The logistic map described with $\varepsilon^{t+1} = \lambda\varepsilon^t(1 - \varepsilon^t)$, $t \geq 0, \varepsilon \in (0, 1)$ starts showing the chaotic behavior with $\lambda > 3.57$. The oscillator dynamics in the network is fully explained in [3]. Considering this in our previous research an oscillator network for the case of currency basket was built and we described the assumption of coherence existing for the model:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |S_A^{t+1}| = \lim_{x \rightarrow \infty} |(1 - \frac{2}{3}\sigma)[(\alpha_A S_A^t - \alpha_B S_B^t) + (\lambda\varepsilon_A^t(1 - \varepsilon_A^t) - \lambda\varepsilon_B^t(1 - \varepsilon_B^t))]| \rightarrow const \quad (1)$$

In this work, we decided to build the model for the case of an investment portfolio, which can be considered as the combination of financial stocks. The modified (with the logistic map) ARMA model was built for predicting the close price of 10 companies from DowJones Index. Then by fixing these values and changing the coupling strength, we studied if the coherence exists between oscillators using the (1) assumption for the networks with different types of connections - all to all, three to all, each only with two.

References

- [1] Mills, Terence, Markellos, Raphael. (2008). Nonlinear Times Series in Financial Economics.
- [2] G. Ganeshapillai, J. Guttag, A. W. Lo, in 30th International Conference on Machine Learning, ICML 2013 (International Machine Learning Society (IMLS), 2013), pp. 768-776.
- [3] Omelchenko I. Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States / I. Omelchenko, Y. Maistrenko. // American Physical Society. - 2011. - 106. - p. 1-4.

E-mail: ✉¹natalyshch@gmail.com, ✉²a.marchenko@ukma.edu.ua.

4 Секція «Методики навчання та історії математики »

Керівник: Петравчук Анатолій Петрович

Дослідження різних способів доведення нерівності Коші–Буняковського

¹ Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського”, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Київ, Україна

² Національний технічний університет “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, Україна

Одна з найбільш фундаментальних нерівностей математики — нерівність Коші–Буняковського (далі НКБ), що зв’язує норму та скалярний добуток векторів векторного простору,

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}).$$

Знаходить застосування в лінійній алгебрі для векторів, в математичному аналізі для нескінченних рядів і інтегрування добутоків та в теорії ймовірностей. Традиційно, для доведення НКБ використовують одну з аксіом скалярного добутку $(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) \geq 0$. Розкриючи дужки отримуємо формулу, що є квадратним тричленом відносно λ :

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}) + (\lambda\vec{x}, -\vec{y}) + (-\vec{y}, \lambda\vec{x}) + (-\vec{y}, -\vec{y}) &\geq 0, \\ \lambda^2(\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) &\geq 0.\end{aligned}$$

Його знакосталість вимагає недодатності дискримінанта, що й доводить НКБ. Варто зауважити, що доведення має досить штучний характер.

НКБ легко довести розглянувши відповідну функцію

$$f(\vec{x}) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2.$$

Варто лише переписати її у вигляді квадратичної функції. І далі доведення через дискримінант аналогічне до попереднього.

Ще одне доведення пов’язане з тотожністю Лагранжа:

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \\ = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + \dots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2.\end{aligned}$$

Для доведення достатньо розкрити дужки і звести подібні доданки.

Дослідження різних доведень допоможе досягнути мистецтва доведень, навчитися бачити оригінальні рішення та шляхи розв’язку потенційно складних задач.

[1] З.Ю. Філер. Доведення та використання нерівності Коші–Буняковського (2005).

E-mail: ✉¹ countlessy@gmail.com, ✉² repetala@bigmir.net.

Є. І. Лемешко¹, С. С. Дрінь²

Побудова математичної моделі для рекомендаційної системи підтримки навчального процесу

Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ, Україна.

Системи навчального процесу — це складна організаційна система освітніх закладів.

У даних тезах представлено передумови до побудови ефективної моделі оцінки освітньої мотивації учнів середньої та старшої школи в Україні. Основна мета роботи полягає у створенні системи, яка зможе оцінювати ступінь схильності до природничих або гуманітарних наук та рекомендувати напрямок майбутнього фаху.

Розроблена нами власна анкета та математична модель допоможе неупереджено і, головне, об'єктивно оцінити схильність учнів до вивчення певного навчального предмета.

У дослідженні розглянуто застосування таких математичних конструкцій, як: регресійний аналіз панельних даних з фіксованими ефектами, нечітка логіка для нечислових даних, рекомендаційна система.

Узагальнений вигляд одного з рівнянь математичної моделі:

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_{1t}X_{1t} + \beta_{2t}X_{2t} + \dots + \beta_{kt}X_{kt} + \varepsilon_{it}$$

y_{it} — оцінка за предмет; i — номер респондента; t — рік навчання учня; α_i — набір зовнішніх, позашкільних факторів, що впливають на оцінку конкретного предмета; X_{it} — оцінки за предмети, що корелюють з y_{it} .

Як результат, перспектива даного дослідження не обмежене лише покращенням отриманої моделі: можливе використання вихідного коду створеного додатка, розробка якого стало своєрідною дорожньою картою для майбутніх подібних досліджень.

З точки зору педагогіки, наукове трактування змісту математичної моделі та правильне використання практичних психолого-педагогічних методичних дасть можливість покращити якість навчання. Оскільки вибір кожного не є наперед невідомим фактом, можливо змоделювати логічний зв'язок між рівнем освіти, мотивацією та остаточним вибором учня.

E-mail: ✉¹ e.lemeshko@ukma.edu.ua, ✉² svitlana.drin@ukma.edu.ua.