

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені
М.П.ДРАГОМАНОВА

**ХІІ ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА
КОНФЕРЕНЦІЯ МОЛОДИХ
МАТЕМАТИКІВ**

9-11 травня 2024 р.

Зміст

	2
Секція 1. «Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь»	7
<i>П. О. Білінський</i> <i>Покращення чутливості онлайн-експериментів через використання векторних представлень слів</i>	<i>8</i>
<i>В. А. Величко</i> <i>Парабола безпеки</i>	<i>10</i>
<i>О. О. Вінніченко</i> <i>Симетрійні розв'язки бездисперсійного рівняння Нижника</i>	<i>12</i>
<i>О. А. Галганов</i> <i>Граничні теореми для коротких циклів випадкових перестановок з вагами циклів</i>	<i>14</i>
<i>В. В. Гладун</i> <i>Асимптотична нормальність ОНК параметрів чирпованого сигналу</i>	<i>15</i>
<i>П. О. Глуховський</i> <i>Нешівська рівновага в іграх з розподілу капіталу</i>	<i>17</i>
<i>Д. Д. Горбунов, Р. Є. Майборода</i> <i>Крайовий ефект для модифікованих оцінок Надарая-Ватсона за спостереженнями з суміші</i>	<i>19</i>
<i>О. В. Дикий, О. В. Іванов</i> <i>Консистентність періодограмних оцінок у польовій тригонометричній моделі регресії</i>	<i>21</i>
<i>F. A. Zhydok, R. K. Chorney</i> <i>Hybrid Random Fields</i>	<i>23</i>
<i>А. Ю. Коваленко</i> <i>Стохастичні коаліційні ігри з локальною структурою взаємодії</i>	<i>24</i>
<i>В. В. Гладун, О. В. Іванов, А. М. Кругол</i> <i>Властивості ОНК параметрів квазічирпованого сигналу</i>	<i>25</i>
<i>С. О. Кузарук, В. М. Медвідь</i> <i>Перетворення Фур'є в аналізі збіжності однієї підсумовуючої функції</i>	<i>27</i>
<i>D. O. Lohvynov</i> <i>Strong law of large numbers for pairwise independent identically distributed random variables</i>	<i>28</i>
<i>А. В. Макаrchук, О. В. Барабаш, L.B. Шаповалов</i> <i>Застосування інтерполяційних поліномів для наближеного розв'язання рівнянь</i>	<i>29</i>
<i>Б. III. Манікін</i> <i>Крайова задача для параболічного рівняння зі загальною стохастичною мірою</i>	<i>31</i>
<i>Я. Г. Мокану</i> <i>Ергодичність процесів типу Леві в $\mathbb{R}^d$</i>	<i>33</i>
<i>V. V. Nazarchuk</i> <i>Generalized solvability of pseudo-parabolic integro-differential equations</i>	<i>34</i>

<i>В. В. Новицький</i> <i>Математична модель руху крові у постковідному гігантському капілярі</i>	<i>36</i>
<i>Є. М. Окунев</i> <i>Аналіз корпусу української мови методами моделі прихованого ланцюга Маркова</i>	<i>38</i>
<i>І. В. Розора, С. О. Оласюк, А. О. Мельник</i> <i>Методи імпутації пропущених даних</i>	<i>40</i>
<i>О. D. Prykhodko, K. V. Ralchenko</i> <i>Strong consistency of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model</i>	<i>41</i>
<i>Е. В. Сіколенко, О. І. Василик</i> <i>Оптимізація розрахунку страхової премії за договорами ОСЦПВ</i>	<i>43</i>
<i>Д. Ю. Слущинський</i> <i>Оптимальні стратегії в задачах керування стохастичними клітинними автоматами</i>	<i>45</i>
<i>В. В. Стаматієва</i> <i>Застосування точкових процесів у граничних теоремах, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження</i>	<i>46</i>
<i>А. Ю. Пилипенко, В. В. Ткаченко</i> <i>Необхідна та достатня умова вибуху для напівмарковських блукань народження та загибелі</i>	<i>48</i>
<i>А. Ю. Пилипенко, І. П. Чулаков</i> <i>Узагальнення відображення Скорохода для задачі про склеювання двох процесів</i>	<i>49</i>
<i>Я. О. Шевчук</i> <i>Асимптотичні розв'язки рівняння Єрмакова – Пінні</i>	<i>51</i>
<i>К. І. Шурубур</i> <i>Оптимізація параметрів моделювання φ-субгауссового дробового броунівського руху</i>	<i>52</i>
<i>А. Ю. Міщук, А. М. Шутковський</i> <i>Поліноми Чебишева в теорії наближень</i>	<i>54</i>
<i>В. К. Юськович</i> <i>Про транзієнтність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками</i>	<i>55</i>
Секція 2. «Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу»	56
<i>Н. А. Біловицька</i> <i>Застосування зображення чисел рядами Люрота у фрактальному аналізі функцій</i>	<i>57</i>
<i>О. І. Бондаренко, Н. М. Василенко</i> <i>Про деякі застосування нескінченносимвольного B-зображення чисел у теорії функцій</i>	<i>58</i>
<i>В. О. Василенко, Г. М. Торбін</i> <i>Про нові достатні умови довірчості систем циліндрів Q^*-зображення для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича</i>	<i>61</i>
<i>Є. О. Войцеховський</i> <i>Візуалізація дивних атракторів: реалізація засобами JavaScript</i>	<i>62</i>
<i>Ю. П. Волошин</i> <i>Про перетворення, які зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича</i>	<i>63</i>

Д. П. Герасимчук	
<i>Моделювання детермінованого хаосу засобами обчислювального експерименту</i>	65
В. О. Єлагін	
<i>Перетворення, що зберігають хвости Неге-Q_s-зображення чисел</i>	67
Д. М. Karvatskyi	
<i>Fractal dimension of the boundary of Cantorvals</i>	69
Р. В. Кривошия, Д. Ю. Скакун	
<i>Про тип розподілу послідовностей, продюкованих оператором Гаусса символів ланцюгового зображення</i>	70
О. П. Макарчук	
<i>Асимптотичні характеристики модуля характеристичної функції одного класу узагальнених згорток Бернуллі</i>	71
Д. О. Мирошніченко	
<i>Механічний зміст геодезичних ліній</i>	72
М. Г. Москалько	
<i>Дискретні розподіли нескінченних згорток Бернуллі з щільним в деякій континуальній множині спектром</i>	74
В. В. Назарчук, М. В. Працьовитий	
<i>Один континуальний клас фрактальних функцій, означених в термінах Q_3-зображення чисел</i>	76
О. О. Нікорак, С. П. Ратушняк	
<i>Один континуальний клас фрактальних функцій, означених в термінах ланцюгового A_2-зображення чисел</i>	78
В. Г. Парипса, М. В. Працьовитий	
<i>Множина значень однієї комплекснозначної функції</i>	80
В. І. Плакида, І. М. Лисенко	
<i>Фрактальні функції з двома змінними</i>	81
І. І. Продан	
<i>Фрактальні властивості одного класу функцій</i>	82
Д. М. Сергійко	
<i>Фрактальні властивості інверсора цифр марковського зображення чисел</i>	83
Ю. О. Симоненко	
<i>Геометрія чисел і системи кодування дійсних чисел з ненульовою надлишковістю</i>	84
К. Ю. Соколова	
<i>α-зображення Люрота та множини чисел, задані обмеженнями на символи цього зображення</i>	85
Б. В. Халецький, О. П. Макарчук	
<i>Асимптотичні властивості моментів одного розподілу з незалежними Q_2-символами</i>	87
Н. В. Черчук, Н. А. Василенко	
<i>Властивості одного класу функцій типу Серпінського, пов'язаних з рядами Кантора</i>	88
Д. С. Шпитюк	
<i>Арифметична сума числових множин і канторвали</i>	90

О. С. Аверкін, Л. М. Тимошкевич	
Відновлююче спектральне число повного графа з 4 вершинами	92
К. О. Антошина, С. О. Козеренко	
Про блоки у графах із парними та непарними відстанями між не точками з'єднання	95
В. О. Гапоненко, С. О. Козеренко	
Число загального положення для All-path опуклості та новий алгоритм	97
Б.-Я. В. Дехтяр, С. О. Козеренко	
Конструкція знакового реберного графа	99
А. О. Гак, Ю.-Л. В. Дехтяр, С. О. Козеренко, І. П. Романюк	
Когомоморфізми графів і метричні відображення між їхніми доповненнями .	101
R. V. Skuratovskii, O. K. ZAKOLENKO	
One generalization of the special linear group and matrix equations	103
К. Р. Лучка, Л. М. Тимошкевич	
Класифікація злічених графів Кокстера $T_{2,n+m+1,\infty}^4$ зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$	105
К. О. Антошина, С. О. Козеренко, К. І. Первушин	
Про T-групоїди на скінченних деревах	108
Д. А. Чаус	
Просте доведення реалізації одиничної відстані при покритті площини чотирма неперетинними множинами, де хоча б дві вимірні	110
К. О. Cherevko	
Boolean network optimization by stochastic rewiring	112
К. С. Чернявська, Л. М. Тимошкевич	
Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для графів-кактусів	114
Секція 4. «Теорії алгоритмів, інформатики»	116
О. В. Абашкін	
Перенесення адаптивної анонімізації у контексті класифікації зображень . . .	117
Р. А. Величко, С. С. Дрін	
Прогнозна ціноутворююча модель для товарів з холодним стартом	118
Р. К. Заколенко	
Типи вищого порядку у мові програмування Java	120
Д. В. Зважій	
Використання суфіксних дерев для покращення операцій пошуку в системах управління баз даних	122
О. С. Лобанцов, А. С. Чуйков	
Побудова фракталів Серпінського методом «Гра хаосу»	125
Д. Д. Мерещенко	
Використання алгоритмів мурашиної колонії для визначення маршруту БПЛА	126
Р. О. Мироненко, С. С. Дрін	
Ітераційний підхід до необумовленого оптимального вибору для певної категорії в роздрібній торгівлі	128
Д. М. Сай, О. О. Кубайчук	
Рандомізація в розподілених системах	130

Є. Б. Фісун	
<i>Передбачувальна аналітика в медицині</i>	131
А. О. Tsukanova	
<i>Solving classical (systems of) linear algebraic equations using non-classical methods of computer mathematics</i>	133
Секція 5. «Історії математики та методики навчання математики»	135
Ю. Ю. Бондаренко, Т. В. Маловічко	
<i>Матрі Софі Жермен</i>	136
І. В. Волошко	
<i>Інноваційні підходи до викладання дробів: використання технологій у навчальному процесі</i>	138
Є. В. Кияниця, О. О. Кубайчук	
<i>Спадщина українських математиків</i>	141

Секція 1. «Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь»

Керівники: Клесов Олег Іванович, Чорней Руслан Костянтинович

ПОКРАЩЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ ОНЛАЙН-ЕКСПЕРИМЕНТІВ ЧЕРЕЗ ВИКОРИСТАННЯ ВЕКТОРНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ СЛІВ

П.О. БІЛІНСЬКИЙ

Робота присвячена дослідженню задачі редукції дисперсії в контрольованих онлайн-експериментах (А/В тестах).

Модель контрольованого онлайн-експерименту застосовується великими цифровими компаніями для оптимізації продукції та покращення досвіду користувача по всьому світу [2]. Для перевірки гіпотези про наявність ефекту зазвичай використовується *середній ефект втручання* τ :

$$\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[Y_i(1) - Y_i(0)] \quad (1)$$

Стандартна статистична оцінка τ в експерименті - це різниця середніх між контрольною та тестовою групами $\Delta = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$. Чутливість експерименту (здатність виявляти істинний ефект при певному рівні шуму) найбільше залежить від дисперсії оцінки, тому важливо її мінімізувати.

Задача зменшення дисперсії полягає в знаходженні статистичної оцінки для 1, що мінімізує дисперсію в класі можливих оцінок. Існуючі методи редукції дисперсії включають метод контрольних варіатів (CUPED), метод сурогатів, метод стратифікації [1][3][2]. Найбільш ефективним та універсальним є CUPED, котрий використовує оцінку 2. Проте його застосування обмежене лише випадками, коли для спостережень в експерименті наявна апіорна інформація, що на практиці часто не справджується.

$$\hat{Y}_{cv} = \bar{Y} - \theta \bar{X} + \theta \mathbb{E}[X] \quad (2)$$

Метою дослідження є модифікація існуючих методів для застосування в задачах, де не виконується припущення про наявність апіорної інформації. Використовується інформація у вигляді нечітких індикаторів, що, за припущенням, містяться в даних текстових пошукових запитів. Створення нечіткої стратифікації спостережень на основі текстових даних дає можливість отримати коваріати X , які є оцінкою апіорної поведінки користувача.

В ході дослідження було розроблено методи генерації синтетичних наборів даних та симуляції контрольованих онлайн-експериментів методом

Монте-Карло. Набори даних симулюють реальні дані пошуку роботи в мережі та містять значний рівень шуму, що перешкоджає виявленню коваріат X .

Побудовано моделі, що виявляють інформативні коваріати X із даних та здійснюють редукцію дисперсії методом CUPED. Перший кроком є обчислення векторних представлень слів, що дозволяє згрупувати семантично схожі запити користувачів (модель sBERT). На основі векторів представлень визначаються кластери, які використовуються методом CUPED для редукції дисперсії. Для випробування якості роботи моделей були проведені експерименти із застосуванням до синтетичних наборів даних. В результаті найкраща модель зменшила дисперсію на 11.4% (Таб. 1).

Модель	Редукція дисперсії, %
Binary indicators	11.5%
sBERT + K-Means	6.2%
sBERT + Fuzzy K-Means	6.9%

ТАБЛ. 1. Результати експериментів

Запропонований метод не досягає високих показників редукції дисперсії в порівнянні з існуючими методами (CUPED та метод сурогатів досягають 50%) [3][1]. Проте він має застосування в більш широкому колу задач, де існують перешкоди для застосування стандартних методів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Deng A., Xu Y., Kohavi R., Walker T. *Improving the Sensitivity of Online Controlled Experiments by Utilizing Pre-Experiment Data* // Proceedings of the Sixth ACM International Conference on Web Search and Data Mining. — 2013. — С. 123–132.
- [2] Larsen N., Stallrich J., Sengupta S., Deng A., Kohavi R., Stevens N. *Statistical Challenges in Online Controlled Experiments: A Review of A/B Testing Methodology* // The American Statistician. — 2023. — Т. 78, № 2. — С. 135–149.
- [3] Deng A., Du M., Matlin A., Zhang Q. *Variance Reduction Using In-Experiment Data: Efficient and Targeted Online Measurement for Sparse and Delayed Outcomes* // Proceedings of the Sixth ACM International Conference on Web Search and Data Mining. — 2023. — С. 3937–3946.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: p.bilinskyi@ukma.edu.ua

ПАРАБОЛА БЕЗПЕКИ

В.А. ВЕЛИЧКО

Математика – це не лише абстрактна наука, але й засіб моделювання різноманітних процесів у житті людини. Математичний апарат дозволяє інженерам розв’язувати практичні завдання, що перед ними постають. Розглянемо одне з них.

Відомо, що траєкторією руху тіла в полі сил тяжіння Землі є балістична крива. Якщо вважати це поле однорідним, тобто таким при якому тіло кинуте з початковою швидкістю набагато меншою за першу космічну, то в спрощенні балістичною кривою буде парабола.

Розглянемо рух тіла (рух снаряда), кинутого з фіксованої точки з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту, нехтуючи опором повітря. Рівняння траєкторії такого тіла описується так:

$$x = v_0 t \cos \alpha; y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

Нехай на площині задано рівняння $F(x, y, \varphi) = 0$ параметричної сім’ї кривих, де φ – параметр сім’ї.

Означення 1. Крива l класу C^1 , що задається параметрично: $\begin{cases} x = x(\lambda); \\ y = y(\lambda), \end{cases}$ називається обгорткою сім’ї кривих $F(x, y, \varphi)$, де функція F має неперервні частинні похідні по всіх змінних, коли задана функція $\varphi = \varphi(\lambda)$ – «привило прикріплення» кривих сім’ї до кривої l , що задовольняє такі умови: 1) $F(x(\lambda), y(\lambda), \varphi(\lambda)) \equiv 0$; 2) при кожному фіксованому λ_0 крива $F(x, y, \varphi(\lambda_0)) = 0$ дотикається кривої l ; 3) функція $\varphi = \varphi(\lambda)$ не є сталою на жодному інтервалі зміни λ . [1]

Теорема 1. Якщо обгортка сім’ї $F(x, y, \varphi) = 0$ існує, то її точки задовольняють систему рівнянь: [1]

$$\begin{cases} F(x, y, \varphi) = 0; \\ F_{\varphi}(x, y, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Розглянемо сім’ю траєкторій, що залежать від α – рівняння (1). Обгорткою цієї сім’ї є парабола, що називається параболою безпеки. Поставимо завдання вивести її рівняння, скориставшись Теоремою 1. Щоб виразити рівняння сім’ї кривих, виключимо змінну t з рівняння (1). Щодо другого

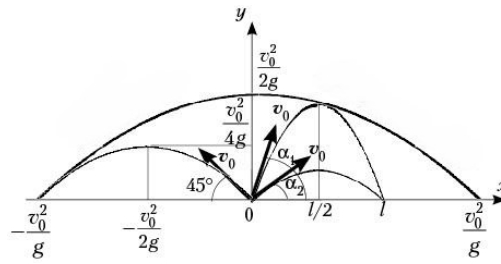


Рис. 1. Парабола безпеки.

рівняння системи (2), то потрібно продиференціювати отримане рівняння сім'ї кривих по змінній α . Отже, отримаємо систему рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0; \\ 0 - x \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

З другого рівняння системи (3):

$$\frac{x}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{gx}{v_0^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right) = 0,$$

тоді $1 - \frac{gx}{v_0^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0$, відповідно $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx}$, підставимо цю рівність у перше рівняння системи (3) і отримаємо:

$$\begin{aligned} y &= \frac{xv_0^2}{xg} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2x^2} \right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \\ y &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Це рівняння параболи безпеки, зведемо його до вигляду системи, виразивши x і y через параметр t . Нехай $x = v_0 t$, тоді рівняння (4) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x = v_0 t; \\ y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Практичним застосуванням виведеного рівняння є те, що коли літак знаходиться вище параболи безпеки, а швидкість вильоту снаряда не перевищує v_0 , то літак невразливий.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Борисенко, О. А. *Диференціальна геометрія і топологія: Навч. посібник для студ.* — Харків : Основа — 1995. — 304с.
- [2] Крижанівський, С. Є. *Диференціальні рівняння : посібник для студентів університетів і педінститутів.* — Х. : Держтехвидав, 1938. — 398 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: v.velychko.al31@kpi.ua

СИМЕТРИЙНІ РОЗВ'ЯЗКИ БЕЗДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ НИЖНИКА

О.О. ВІННІЧЕНКО

Для оптимального виконання ліївських редукцій корозмірності один і два необхідно класифікувати одно- та двовимірні підалгебри максимальної алгебри ліївської інваріантності досліджуваної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Перший крок процедури ліївської редукції бездисперсійного рівняння Нижника

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y \quad (1)$$

реалізовано в [1], де обчислено, зокрема, максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ цього рівняння, а також, використовуючи оригінальну мегаідеальну версію алгебраїчного методу [2], її псевдогрупу точкових симетрій G .

У статті [3] виконано кожен подальший крок оптимізованої процедури ліївської редукції для рівняння (1). У результаті побудовано широкі сім'ї нових інваріантних розв'язків рівняння (1) в явній формі в термінах елементарних та гіпергеометричних функцій, функцій Ламберта, а також у параметричній або неявній формі. Зокрема, отримано повні переліки G -нееквівалентних одно- та двовимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$. Але для ліївської редукції рівняння (1) можливо і доцільно використати лише чотири одновимірні підалгебри і вісім двовимірних підалгебр із цих переліків.

Як приклад розглянемо ліївську редукцію рівняння (1) за двовимірною підалгеброю

$$\langle \partial_t + \lambda(x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u), e^{(\lambda-1)t}(\partial_x + \mu\partial_y - \frac{1}{2}(\lambda-1)(x^2 + \mu y^2)\partial_u) \rangle,$$

де λ, μ — довільні сталі з $\mu \neq 0, 1 \mid \mu \leq 1 \pmod{G}$. Анзац, побудований за цією підалгеброю, та відповідне редуковане рівняння мають вигляд

$$u = e^{3\lambda t}\varphi(\omega) - \frac{\lambda-1}{6}(x^3 + y^3), \quad \omega := e^{-\lambda t}(y - \mu x); \quad (2)$$

$$2(\mu^3 - 1)\varphi_{\omega\omega}\varphi_{\omega\omega\omega} - \omega\varphi_{\omega\omega\omega} + (3\lambda - 2)\varphi_{\omega\omega} = 0.$$

Редуковане рівняння вдалося повністю проінтегрувати для всіх значень параметра λ в явному вигляді чи у параметричній формі. Нижче наведено відповідні розв'язки рівняння (1) з точністю до G -еквівалентності.

Для $\lambda = \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}$ розв'язки зображено в термінах елементарних функцій, де $\varepsilon = \pm 1$, $c_1 \in \{-1, 0, 1\}$:

$$u = -\frac{\lambda - 1}{4(\mu^3 - 1)}(y - \mu x)^3 - \frac{\lambda - 1}{6}(x^3 + y^3),$$

$$u = \varepsilon c_1 e^t \frac{\omega \ln |\omega + \sqrt{\omega^2 + c_1}| - \sqrt{\omega^2 + c_1}}{4(\mu^3 - 1)} + e^t \frac{\omega^3 + \varepsilon \sqrt{(\omega^2 + c_1)^3}}{12(\mu^3 - 1)} + \frac{x^3 + y^3}{9},$$

$$u = \frac{4\varepsilon}{15} e^{\frac{5}{2}t} (4(\mu^3 - 1)^2 - e^{-\frac{5}{6}t}(y - \mu x))^{5/2} + (\mu^3 - 1) e^{\frac{5}{6}t} (y - \mu x)^2 + \frac{x^3 + y^3}{36},$$

$$u = \frac{(1 - 8(\mu^3 - 1)e^{-\frac{4}{3}t}(y - \mu x))^{5/2}}{1920\varepsilon e^{-4t}(\mu^3 - 1)^4} - \frac{(y - \mu x)^3}{12(\mu^3 - 1)} + \frac{e^{\frac{4}{3}t}(y - \mu x)^2}{16(\mu^3 - 1)^2} - \frac{x^3 + y^3}{18}.$$

При $\lambda = 1$ розв'язки побудовано в термінах головної і побічної дійсних гілок W -функції Ламберта $W_0(\tilde{\omega})$ і $W_{-1}(\tilde{\omega})$:

$$u = -(y - \mu x)^3 \frac{18z^2 + 15z + 4}{216(\mu^3 - 1)z^3}, \quad z \in \{W_0(\tilde{\omega}), W_{-1}(\tilde{\omega})\}, \quad \tilde{\omega} := -\frac{e^{-t}(y - \mu x)}{2(\mu^3 - 1)}.$$

Для інших значень λ одержано параметричне представлення розв'язків через анзац (2), де

$$\varphi = (\mu^3 - 1) \frac{4(\mu^3 - 1)s - 3\omega}{27\lambda(2\lambda - 1)} s^2 - \frac{(\mu^3 - 1)s - \omega}{3\lambda(3\lambda - 1)} \omega s, \quad \lambda \neq 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},$$

$$\varphi = \frac{2}{27}(\mu^3 - 1)^2 s^3 - \frac{5}{9}(\mu^3 - 1)|s|^{3/2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s) \ln |s|, \quad \lambda = 0,$$

$$\varphi = \frac{8}{27}(\mu^3 - 1)^2 s^3 + \frac{4}{3}(\mu^3 - 1) \ln |s| + \frac{4}{3s^3}, \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

а $s = s(\omega)$ — розв'язок трансцендентного рівняння Ламберта.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Boyko V.M., Popovych R.O. and Vinnichenko O.O. *Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation* // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2024. — V. 132, no. 107915. — 19 pp., arXiv:2211.09759.
- [2] Maltseva D.S. and Popovych R.O. *Complete point-symmetry group, Lie reductions and exact solutions of Boiti–Leon–Pempinelli system* // Phys. D. — 2024. — V. 460, no. 134081. — 21 pp., arXiv:2103.08734.
- [3] Vinnichenko O.O., Boyko V.M. and Popovych R.O. *Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation* // Accepted to Anal. Math. Phys. — 2024. — 41 pp., arXiv:2308.03744.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ КОРОТКИХ ЦИКЛІВ ВИПАДКОВИХ ПЕРЕСТАНОВОК З ВАГАМИ ЦИКЛІВ

О.А. ГАЛГАНОВ

Вступ. Нехай σ_n — випадкова перестановка, що обрана з симетричної групи $\mathcal{S}_n$ відповідно до розподілу

$$\mathbb{P}(\sigma_n = \sigma) = \frac{1}{h_n n!} \prod_{k=1}^{\infty} \theta_k^{C_k(\sigma)}, \quad \sigma \in \mathcal{S}_n,$$

де θ_k — невід’ємні дійсні параметри, $C_k(\sigma)$ — кількість циклів довжини k в σ , а h_n — стала нормування.

На $\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{X}_k$, де $\mathbb{X}_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : \min\{x_1, \dots, x_k\} = x_1\}$, задамо послідовність точкових процесів

$$\Psi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}}^{\neq} \delta_{\left(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_k}{n}\right)} \mathbb{1}\{\sigma_n(i_1) = i_2, \dots, \sigma_n(i_k) = i_1\}, \quad (1)$$

яка несе всю інформацію про склад циклів σ_n . Тут $\sum^{\neq}$ означає, що сума береться за попарно різними $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, а δ_x є мірою Дірака в x .

Зокрема, $\Psi_n(\mathbb{X}_k)$ є кількістю циклів довжини k в σ_n , і відомо [2], що

$$(\Psi_n(\mathbb{X}_1), \Psi_n(\mathbb{X}_2), \Psi_n(\mathbb{X}_3), \dots) \xrightarrow{d} (Y_1, Y_2, Y_3, \dots), \quad (2)$$

де $Y_k \sim \text{Pois}(\theta_k/k)$, в $\mathbb{Z}_+^{\infty}$ в тих випадках, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n-1}}{h_n} = 1$.

Результати. В роботі пропонується значне узагальнення (2), а саме — встановлено грубу збіжність за розподілом послідовності Ψ_n , визначеної (1), до точкового процесу Пуассона Ψ на $\mathbb{X}$ з мірою інтенсивності $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \lambda_k(\cdot \cap \mathbb{X}_k)$, де λ_k — міра Лебега на $\mathbb{X}_k$. За допомогою теореми про неперервне відображення для функціоналів на просторі точкових мір отримано граничні розподіли низки важливих характеристик перестановок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Galganov Oleksii, Iliencko Andrii. Short cycles of random permutations with cycle weights: point processes approach. — 2023. — Submitted. Access mode: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.10721>.
2. Ercolani Nicholas M., Ueltschi Daniel. Cycle structure of random permutations with cycle weights // Random Structures Algorithms. — 2014. — Vol. 44, no. 1. — P. 109–133.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alex.galganov@gmail.com

На основі сумісної роботи [1] з А.Б. Ільєнком.

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ОНК ПАРАМЕТРІВ ЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В.В. ГЛАДУН

У доповіді розглянуто неперервний у часі множинний чирпований сигнал (англ. *chirp signal*), що спостерігається на фоні сильно або слабо залежного випадкового шуму та отримано властивість асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів сигналу.

Припустимо, що спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad \text{де}$$

$$g(t, \theta^0) = \sum_{j=1}^N (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2)), \quad (1)$$

$$\theta^0 = (A_1^0, B_1^0, \phi_1^0, \psi_1^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \phi_N^0, \psi_N^0)^*, \quad (2)$$

$(A_j^0)^2 + (B_j^0)^2 > 0, j = \overline{1, N}$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ є випадковим шумом, що задовольняє наступним вимогам.

A1. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

- (i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;
- (ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

A2.

- (i) Процес ε , що задовольняє умову **A1(i)**, має спектральну щільність $f(\lambda) = \tilde{L}(1/|\lambda|)|\lambda|^{\alpha-1}, \lambda \in \mathbb{R}$, де $\tilde{L}$ – повільно змінна на нескінченності функція, а також f має четвертий спектральний момент.
- (ii) Спектральна щільність процесу ε , що задовольняє умову **A1(ii)**, має четвертий спектральний момент.

У роботі [1] для оцінювання параметрів (2) ми ввели спеціальні параметричні множини, які залежать від часу спостереження T , що дозволяють асимптотично розрізняти параметри нашої статистичної моделі. Припустимо, що істинні значення амплітуд $A_j^0, B_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними числами, а істинні значення частот $\phi_j^0, j = \overline{1, N}$, і параметрів $\psi_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними

додатними числами. Розмістимо параметри $\psi^0 = (\psi_1^0, \dots, \psi_N^0)$ в порядку зростання і припустимо, що

$$\psi^0 \in \Psi(\underline{\psi}, \overline{\psi}) = \{\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) : 0 \leq \underline{\psi} < \psi_1 < \dots < \psi_N < \overline{\psi} < +\infty\}.$$

В свою чергу, також введемо параметричну множину

$$\phi^0 \in \Phi(\underline{\phi}, \overline{\phi}) = \{\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) : 0 \leq \underline{\phi} < \phi_j < \overline{\phi} < +\infty, j = \overline{1, N}\}.$$

Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин $\Psi_T \subset \Psi(\underline{\psi}, \overline{\psi})$, $T > T_0 > 0$, що містить вектор ψ^0 , таку, що $\bigcup_{T > T_0} \Psi_T = \tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi}^c = \Psi^c(\underline{\psi}, \overline{\psi})$, і виконується наступна вимога розрізнення параметрів.

$$\text{В. } \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ \psi \in \Psi_T}} T^2 (\psi_{j+1} - \psi_j) = +\infty; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in \Psi_T} T^2 \psi_1 = +\infty.$$

Означення. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \phi_{1T}, \psi_{1T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \phi_{NT}, \psi_{NT}), \quad (3)$$

що мінімізує значення функціоналу $Q_T(\theta) = \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt$ на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{4N}$, де амплітуди $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$, приймають будь-які значення, а параметри $\phi_j, \psi_j, j = \overline{1, N}$ приймають значення у множині $\Phi^c(\underline{\phi}, \overline{\phi}) \times \Psi_T^c, T > T_0 > 0$, називається ОНК параметра θ^0 .

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність ОНК параметрів чирпованого сигналу.

Теорема. Нехай виконуються умови **A1**, **A2** та **B**. Тоді нормована ОНК

$$\left(T(A_{1T} - A_1^0), T(B_{1T} - B_1^0), T^2(\phi_{1T} - \phi_1^0), T^3(\psi_{1T} - \psi_1^0), \dots, T(A_{NT} - A_N^0), T(B_{NT} - B_N^0), T^2(\phi_{NT} - \phi_N^0), T^3(\psi_{NT} - \psi_N^0) \right)^*$$

є асимптотично нормальною $N(0, \Sigma)$ при $T \rightarrow \infty$, де Σ є матрицею порядку $4N$, що задана формулами (59)-(62) у роботі [1].

Зазначимо, що коваріаційна матриця Σ є виродженою, і $\text{rank}(\Sigma) = 2N$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ivanov, A., Hladun, V. (2024). Asymptotic normality of the LSE for chirp signal parameters. *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 11(2), 195-216. doi:10.15559/24-VMSTA247

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: victor.gladun2000@gmail.com

НЕШІВСЬКА РІВНОВАГА В ІГРАХ З РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛУ

П.О. ГЛУХОВСЬКИЙ

Гра видобутку ресурсів належить до класу динамічних ігор. Вона реалізується покроково в дискретні моменти часу $t = 1, 2, 3, \dots$. На кожному з цих етапів гравці незалежно один від одного, водночас приймають рішення. Розглядається модель гри видобутку ресурсів із недослідженого досі класу, а саме гра із довільною кількістю частиників, необмеженим простором станів та необмеженими функціями корисності гравців, а також законом переходу між станами, визначеним як стохастичний процес, що залежить від спільної інвестиції гравців.

Опис розглянутої симетричної гри видобутку ресурсів з m гравцями ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$) :

(i) Кількість учасників є сталою протягом усієї гри. Кожен гравець іменується номером від 1 до m .

(ii) Об'єм доступного в момент часу $t \in T$ ресурсу, доступного для використання, називається станом гри в момент t і позначається s_t . Множина всіх можливих обсягів ресурсу називається простором станів і дорівнює $S = [0; +\infty)$.

(iii) Гравці незалежно один від одного приймають рішення на кожному з етапів $t \in T$. Простір рішень, доступних для кожного гравця, залежить від поточного стану гри $s_t \in S$ і дорівнює $A(s_t) = [0; s_t/m]$.

(iv) Миттєвою корисністю кожного гравця, є неперервна зростаюча функція $u : S \rightarrow [0; +\infty)$, $u(x) = c \log_a(x)$

(v) Закон переходу між станами є стохастичним, і задається рівнянням стану $s_{t+1} = M(s_t, \bar{a}_t, \xi_t)$, де M - неперервна функція, залежна від стану гри $s_t \in S$ та вектору рішень гравців $\bar{a}_t$ в момент часу $t \in T$, а також від випадкового збурення ξ_t , причому в припущенні моделі кожен наступний стан гри є лінійним перетворенням залишку від наявного ресурсу з мультиплікативним випадковим збуренням, що має однаковий розподіл на кожному кроці гри, тобто: $s_{t+1} = y_t \cdot \xi_t$, де $s_t \in [0; +\infty)$ - значення стану в момент $t \in \mathbb{N}$, $y_t \in [0; s_t]$ - спільна інвестиція гравців на етапі t , а $\xi_t \in [0; +\infty)$ є незалежною реалізацією певної випадкової величини на етапі t . Розглядається випадок, коли спільна інвестиція визначається як кількість ресурсу, що залишається на поточному етапі гри після видобутку агентами обумовлених власними рішеннями часток $y_t = (s_t - \sum_{i=1}^m a_{ti})$

(vi) Усі гравці мають однаковий дисконтуючий множник $\beta \in (0; 1)$.

(vii) Загальний виграш гравця $i \in [m]$ дорівнює $\sum_{t \in T} \beta^{t-1} u(a_{ti})$, де a_{ti} — i -та координата вектора $\bar{a}_t$.

Додатково у запропонованій моделі передбачається, що $\beta [\log_a(\xi)] < 1$ — природня умова для обмеження швидкості зростання ресурсу. Завдяки цій додатковій умові, очікуваний дисконтований виграш кожного гравця при грі із нескінченним горизонтом є обов'язково збіжним, що забезпечує коректність та доцільність розгляду задачі.

Для запропонованої моделі знаходяться умови, при яких гра має Ідеальну Симетричну Марковську Рівновагу. Зокрема, для її наявності потрібно, щоб $\beta c > 1$. Також показано, що вона є соціально-оптимальною, однак не оптимальною за Парето.

Ключові слова: стохастичні ігри з ненульовою сумою, видобуток ресурсів, накопичення капіталу, стаціонарна рівновага за Нешем, Марковська ідеальна рівновага, логарифмічна функція корисності, геометричне випадкове блукання, дискретний час, дисконтований виграш, кооперативна теорія ігор.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Силенко І. В. *Марковська Ідеальна Рівновага у грі видобутку ресурсів зі степеневими перевагами агентів : дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю "Прикладна математика"* / Силенко Ілля Володимирович ; науковий керівник: Чорней Р. К. ; Національний університет "Києво-Могилянська академія". — Київ: НаУКМА, 2023. — 186 с.
- [2] Balbus, L., Nowak, A. S. *Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation.* // Automatica. — 2008. — Vol. 44, no. 6. — P. 1471–1479.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ", Київ, Україна
Email address: p.hlukhovskiy@ukma.edu.ua

КРАЙОВИЙ ЕФЕКТ ДЛЯ МОДИФІКОВАНИХ ОЦІНОК НАДАРАЯ — ВАТСОНА ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З СУМІШІ

Д.Д. ГОРБУНОВ, Р.Є. МАЙБОРОДА

Розглянемо модель суміші зі змінними концентраціями, в якій кожен об'єкт O_j вибірки $O_1, \dots, O_n$ належить до однієї з M популяцій (компонент суміші). Справжній номер компоненти суміші κ_j , якій належить O_j , не спостерігається, проте відомим є розподіл κ_j :

$$\mathbf{P}\{\kappa_j = k\} = p_j^k,$$

де імовірності $\{p_j^k\}$ називають концентраціями.

Для O_j спостерігаються дві характеристики X_j та Y_j , залежність між якими задана у непараметричній формі

$$Y_j = g^{(\kappa_j)}(X_j) + \varepsilon_j,$$

де $g^{(k)}$ є невідомою функцією регресії k -ої компоненти суміші, ε_j є випадковою помилкою, розподіл якої може бути різним для різних компонент суміші.

Для оцінювання $g^{(k)}(x_0)$ використаємо узагальнену оцінку Надарая-Ватсона з [1]:

$$\hat{g}_n^{(k)}(x_0) = \frac{\sum_{j=1}^n a_j^k K((x_0 - X_j)/h) Y_j}{\sum_{j=1}^n a_j^k K((x_0 - X_j)/h)}, \quad (1)$$

де функція $K(x)$ називається ядром, а $h > 0$ — параметром згладжування. Мінімаксні коефіцієнти $\{a_j^k\}$ обчислюються на основі концентрацій $\{p_j^k\}$, див. п. 2.1 у [2]. У [1] показано, що коли x_0 є точкою неперервності щільності розподілу X_j , оптимальним вибором параметра згладжування є $h \sim Cn^{-1/5}$, причому $\hat{g}_n^{(k)}(x_0) - g^{(k)}(x_0) \sim \zeta n^{-2/5}$, де ζ — невідроджена гауссова випадкова величина.

У доповіді ми розглянемо випадок, коли оцінювання проводиться в точці розриву щільності X_j . У цьому випадку, внаслідок крайового ефекту, оптимальним є вибір $h \sim Cn^{-1/3}$ і найкраща швидкість збіжності, яку може мати оцінка, є $\hat{g}_n^{(k)}(x_0) - g^{(k)}(x_0) \sim \zeta n^{-1/3}$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Дичко Г.М., Майборода Р.Є. *Узагальнені оцінки Надарая-Ватсона для спостережень з суміші*. Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2019. — Вип. №1— С. 60–74.
- [2] Майборода Р.Є., Сугакова О.В. *Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші*. — Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. — 213 с.

КНУ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: `danielhorbunov@knu.ua`

КНУ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: `rostmaiboroda@knu.ua`

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК У ПОЛЬОВІЙ ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

О.В. ДИКИЙ, О.В. ІВАНОВ

Позначимо $\langle \varphi, t \rangle = \sum_{l=1}^M \varphi_l t_l$, $\|t\| = \sqrt{\langle t, t \rangle}$ для векторів $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$, $t = (t_1, \dots, t_M)$, $M \geq 3$. Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = A_0 \cos(\langle \varphi^0, t \rangle) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, \infty]^M,$$

де $A_0 > 0$, $\varphi^0 \in \prod_{i=1}^M (\underline{\varphi}_i, \overline{\varphi}_i) = \Phi_M$, $0 < \underline{\varphi}_i, \overline{\varphi}_i < +\infty$, $i = \overline{1, M}$. Припустимо, що φ_i^0 , $i = \overline{1, M}$ - різні числа, а випадковий шум ε задовольняє наступну умову.

Н. $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^M$, — вибірково неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = \mathbb{E} \varepsilon(t) \varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}^M$, причому виконується одне з припущень:

- (i) Поле ε є ізотропним та $B(t) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|) / \|t\|^\alpha$, $\alpha \in (0, M - [\frac{M}{2}])$, з неспадною повільно змінною на нескінченності функцією L ;
- (ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^M)$.

Означення 1. Періодограмною оцінкою параметра φ^0 будемо називати такий випадковий вектор $\varphi_T \in \Phi_M^C$, для якого

$$Q_T(\varphi_T) = \max_{\varphi \in \Phi_M^C} Q_T(\varphi),$$

$$Q_T(\varphi) = \left| 2T^{-M} \int_{[0, T]^M} X(t) e^{i\langle \varphi, t \rangle} dt \right|^2.$$

Оцінку амплітуди A_0 означимо за формулою $A_T = Q_T^{1/2}(\varphi_T)$.

У роботі [1] доведено наступний посилений закон великих чисел.

Лема 1. За умови **Н** при $T \rightarrow \infty$

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}^M} T^{-M} \left| \int_{[0, T]^M} e^{-i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н.}$$

З використання цього факту ми доводимо наступні 3 твердження, причому друге впливає з першого, а третє з другого.

Теорема 1. *Якщо виконано умову $\mathbf{N}$, то $\varphi_T \rightarrow \varphi^0$ м.н., $T \rightarrow \infty$.*

Лема 2. *За умови $\mathbf{N}$: $A_T \rightarrow A_0$ м.н., $T \rightarrow \infty$.*

Теорема 2. *За умови $\mathbf{N}$: $T(\varphi_T - \varphi^0) \rightarrow 0$ м.н., $T \rightarrow \infty$.*

Сформульовані результати узагальнюють результати роботи [2] для випадку $M = 2$.

Отримані результати можуть бути використані в статистичному аналізі багатовимірних симетричних текстурованих поверхонь.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dykyi, O.V., Ivanov, A.V. *Consistency of LSE for the many-dimensional symmetric textured surface parameters* // Modern Stoch. Theory Appl. — 2023. — 10(3). — С. 267–285.
- [2] Іванов, О.В., Лимар, О.В. *Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі спостережень на площині* // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2019. — 2(101). — С. 115–133.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: dykyiolexandr@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alexntuu@gmail.com

HYBRID RANDOM FIELDS

F.A. ZHYDOK, R.K. CHORNEI

Hybrid Random Fields [1] is a class of graphical probabilistic models and it combines Bayesian Networks and Markov Random Fields models. Due to certain assumptions and properties [1] of Hybrid Random Fields, it can simplify the calculation of joint distribution for a certain set of random variables and conditional probability densities for each of the random variables.

In the scope of this project, Hybrid Random Fields is adjusted to classification and regression tasks, which require the prediction of a certain random variable value, and is compared to classical machine learning algorithms by performance. As this class of models has different joint density estimation processes [2] [3], different estimators of $\mathbb{E}[Y|X]$ were developed, as finding solution of (1) for continuous data case can be quite complex.

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|X = x) dy \quad (1)$$

After the development of these estimators, they are compared with classical machine learning approaches to these tasks such as Logistic Regression, Linear Regression, Random Forrest, Naive Bayes, K-Nearest Neighbors and Support Vector Machines with appropriate metrics.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Freno Antonino, Trentin Edmondo. Hybrid Random Fields: A Scalable Approach to Structure and Parameter Learning in Probabilistic Graphical Models. — 2011. — 01. — Vol. 15. — ISBN: 978-3-642-20307-7.
- [2] Liu Han, Lafferty John, Wasserman Larry. The Nonparanormal: Semiparametric Estimation of High Dimensional Undirected Graphs // Journal of Machine Learning Research. — 2009. — 04. — Vol. 10.
- [3] Silverman B. W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. — London : Chapman & Hall, 1986.

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY
Email address: `fedir.zhydok@ukma.edu.ua`

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY
Email address: `r.chornei@ukma.edu.ua`

СТОХАСТИЧНІ КОАЛІЦІЙНІ ІГРИ З ЛОКАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ ВЗАЄМОДІЇ

А.Ю. КОВАЛЕНКО

В межах даної роботи було модифіковано алгоритм Говарда [2], який можна використовувати для пошуку оптимальних стратегій в стохастичних коаліційних іграх з локальною структурою взаємодії [1] з дискретними станами та діями у гравців.

Також в роботі було доведено збіжність вищеназваного алгоритму до розв'язків задач.

Для тестування роботи алгоритму була написана програма, що при наданні початкових умов шукає оптимальні стратегії для двох коаліцій.

В роботі розглядалися стохастичні коаліційні ігри з локальною структурою взаємодії. Вони мають широке застосування в моделюванні задач в галузях керування, економіки, біології, психології і, особливо, у військовій справі.

В подальшому можна розширити можливості алгоритму для вирішення задач з трьома та більше коаліціями та для неперервних множин станів та дій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ruslan K. Chorney, Hans Daduna, Pavel S. Knopov *Stochastic games for distributed players on graphs*. 2004. — 20с.
- [2] R. A. Howard *Dynamic Programming and Markov Processes* — 1960. — 160с.

NATIONAL UNIVERSITY OF "KYIV-MOHYLA ACADEMY KYIV, UKRAINE
Email address: arkadii.kovalenko@ukma.edu.ua

ВЛАСТИВОСТІ ОНК ПАРАМЕТРІВ КВАЗІЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В.В. ГЛАДУН, О.В. ІВАНОВ, А.М. КРУГОЛ

У доповіді ми розглядаємо неперервний у часі сигнал, що є сумою гармонічного коливання та елементарного чирпованого сигналу (англ. *chirp signal*). У англійській літературі модель такого сигналу називають *chirp-like model* (див. [1]), а ми будемо називати такий сигнал квазічирпованим. У доповіді досліджується модель квазічирпованого сигналу, що спостерігається на фоні адитивного сильно або слабо залежного випадкового шуму. Отримано властивості консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів цього сигналу.

Нехай спостерігається стохастичний процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad \text{де}$$

$$g(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t) + C^0 \cos(\psi^0 t^2) + D^0 \sin(\psi^0 t^2), \quad (1)$$

$$\theta^0 = (A^0, B^0, \phi^0, C^0, D^0 \psi^0)^*, \quad (2)$$

$(A^0)^2 + (B^0)^2 > 0$, $(C^0)^2 + (D^0)^2 > 0$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ є випадковим шумом, що задовольняє наступним вимогам.

A1. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

- (i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;
- (ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

A2.

- (i) Процес ε , що задовольняє умову **A1(i)**, має спектральну щільність $f(\lambda) = \tilde{L}(1/|\lambda|)|\lambda|^{\alpha-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, де $\tilde{L}$ – повільно змінна на нескінченності функція, а також f має четвертий спектральний момент.
- (ii) Спектральна щільність процесу ε , що задовольняє умову **A1(ii)**, має четвертий спектральний момент.

Припустимо також, що істинні значення амплітуд (A^0, B^0, C^0, D^0) є різними числами, а істинні значення кутової частоти та темпу частоти

(ϕ^0, ϕ^0) є різними додатними числами. Для деяких фіксованих чисел

$$0 < \underline{\phi} < \bar{\phi} < +\infty, \quad 0 < \underline{\psi} < \bar{\psi} < +\infty$$

нехай $\phi^0 \in (\underline{\phi}, \bar{\phi})$, $\psi^0 \in (\underline{\psi}, \bar{\psi})$.

Означення. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_T, B_T, \phi_T, C_T, D_T, \psi_T),$$

що мінімізує значення функціоналу $Q_T(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt$ на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^6$, де амплітуди (A, B, C, D) , приймають будь-які значення, а параметри (ϕ, ψ) приймають значення у множині $[\underline{\phi}, \bar{\phi}] \times [\underline{\psi}, \bar{\psi}]$, називається ОНК параметра θ^0 .

Сформулюємо теорему про консистентність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. Доведення цієї теореми використовує схему роботи [2]. Зокрема, в даній роботі доведено рівномірний закон великих чисел для заданого випадкового процесу ε , зваженого тригонометричними функціями (1), що є важливим результатом для доведення наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай виконується умова **A1**. Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 у тому сенсі, що $A_T \rightarrow A^0$, $B_T \rightarrow B^0$, $T(\phi_T - \phi^0) \rightarrow 0$, $C_T \rightarrow C^0$, $D_T \rightarrow D^0$, $T^2(\psi_T - \psi^0) \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$.*

Далі, спираючись на результат теореми 1, отримуємо теорему про асимптотичну нормальність ОНК θ_T .

Теорема 2. *Нехай виконуються умови **A1** та **A2**. Тоді нормована ОНК $T^{1/2}(A_T - A^0)$, $T^{1/2}(B_T - B^0)$, $T^{3/2}(\phi_T - \phi^0)$, $T(C_T - C^0)$, $T(D_T - D^0)$, $T^3(\psi_T - \psi^0)$ є асимптотично нормальною $N(0, \Sigma)$ при $T \rightarrow \infty$, де матриця Σ є матрицею 6 порядку, що залежить від параметрів (2).*

Зазначимо, що коваріаційна матриця Σ є виродженою, і $\text{rank}(\Sigma) = 5$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Grover, R., Kundu, D. and Mitra, A. (2018). Chirp-like model and its parameters estimation. *Int. Conf. on Computing, Power and Communication Technologies, India*, pp. 1095-1100. <https://doi.org/10.1109/GUCON.2018.8674970>.
- [2] Ivanov, A., Hladun, V. (2023). Consistency of the LSE for Chirp Signal Parameters in the Models with Strongly and Weakly Dependent Noise. *Austrian Journal of Statistics*, 52(SI), 107–126. <https://doi.org/10.17713/aj.s.v52iSI.1762>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: victor.gladun2000@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alexntuu@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: anya.krugol2001@gmail.com

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є В АНАЛІЗІ ЗБІЖНОСТІ ОДНІЄЇ ПІДСУМОВУЮЧОЇ ФУНКЦІЇ

С.О. КУХАРУК, В.М. МЕДВІДЬ

В теорії збіжності функцій неперервне перетворення Фур'є відіграє важливу роль. Теорема Рімана–Лебега, наприклад, дозволяє аналізувати поведінку функцій на нескінченно віддалених частотах. Теореми Планшереля та Парсеваля надають додаткові інструменти для детального аналізу збіжності функцій в термінах їх перетворень Фур'є.

Особливий інтерес представляє дослідження збіжності перетворення Фур'є підсумовуючих функцій в класі функцій W^1 , який використовується в обробці сигналів. Не менш важливим, але менш дослідженим елементом дослідження властивостей сигналів є неперервне перетворення Фур'є наступного вигляду

$$F(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau(u) \cos \left(ux + \frac{\beta\pi}{2} \right) \quad (1)$$

Перетворення Фур'є (1) для гармонійної підсумовуючої функції Вейєрштрасса наразі є малодослідженим. Це становить проблему, оскільки така функція може бути потужним інструментом для аналізу складних сигналів, розкладаючи їх на прості гармонічні компоненти. Дослідження властивостей цього перетворення, зокрема його швидкості збіжності, має велике значення для подальшого розвитку обробки сигналів та розуміння природи сигналів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Sneddon I.N. *The Uses of Integral Transforms*. — New York: McGraw-Hill, 1972. — 539 с.
- [2] Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. *Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є : навч. посіб. для фахівців в галузі зв'язку*. — Одеса, 2021. — 122 с.
- [3] Шкіль М.І. *Математичний аналіз. Ч. 2*. — Київ: Вища школа, 1981. — 455 с.

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: kukharuksofiia@gmail.com

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: valentin.medvid@gmail.com

STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR PAIRWISE INDEPENDENT IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES

D.O. LOHVYNOV

Consider the case of a two-dimensional $\{X_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ sequence of pairwise independent and identically distributed random variables and let's investigate the strong law of large numbers employing multi-indexed sums.

If $\{X_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ are independent, then the law of large numbers is known for $a_{n,m} = nm$. If $\{X_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ are pairwise independent, then the law of large numbers is proven [1, theorem 2]. We use another normalization in the law of large numbers [2, Corollary 9.11].

Theorem 1. *Assume $\{X_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ is a two-dimensional sequence of pairwise independent identically distributed random variables, r is a number in $(1, 2]$. Then one has*

$$\left(\mathbb{E}|X|^{\frac{2}{r}} < \infty\right) \Rightarrow \left(\lim(\max)_{n,m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \mathbb{E}X_{i,j})}{(m+n)^r} = 0, \quad a.s.\right)$$

The proof of this theorem combines methods from both [1] and [3]. Moreover, the statement of the theorem can be generalized in a similar fashion to [2, Corollary 9.11] i.e. not two-dimensional sequences, but for d -dimensional sequences.

REFERENCES

- [1] N. Etemadi, *An elementary proof of the strong law of large numbers*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 55(1) (1981), 119–122.
- [2] Klesov, O.: *Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables*. Probability Theory and Stochastic Modelling, vol. 71. Springer, Berlin (2014)
- [3] L. V. Thanh, *Strong laws of large numbers for sequences of blockwise and pairwise m -dependent random variables*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 33 (2005), no. 4, 397–405.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS, KYIV, UKRAINE

Email address: denislogvinov410@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ

А.В. МАКАРЧУК, О.В. БАРАБАШ, Д.В. ШАПОВАЛОВ

Ров'язування рівнянь виду

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

є досить поширеною задачею при дослідженні багатьох явищ. Однак, іноді бувають такі ситуації, коли аналітичне відшукування необхідних розв'язків (1) є завданням надзвичайно складним із-за складності лівої частини. В таких ситуаціях прийнято використовувати різноманітні обчислювальні методи [1] типу методу дихотомії чи методу дотичних.

Класичні методи наближеного розв'язування рівнянь виду (1) типу вище згаданих можуть себе показувати досить ефективно в плані точності, але якщо обчислення лівої частини (1) є дуже складним, то для спрощення обчислень доцільним є попереднє використання різних методів наближення, одним із яких є інтерполяція.

На даний момент одним із цікавих напрямків у наближенні функцій інтерполяційними поліномами є використання інтерполяційних аналогів різних гармонійних операторів [2]. Так, наприклад, в контексті наближення 2π -періодичної функції досить широко досліджується оператор Фейєра [3] цієї функції

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(f, x) = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt, \quad (2)$$

а для інтерполювання цієї функції - інтерполяційний аналог даного оператора

$$\bar{\sigma}_n(x) = \frac{1}{n(n+1)\pi} \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{\sin \frac{n+1}{2}(x-x_k)}{\sin \frac{x-x_k}{2}} \quad (3)$$

Тому метою даної роботи є дослідження того, наскільки точно можна наблизити розв'язок рівняння (1) в проміжку

$$-\pi \leq x \leq \pi,$$

попередньо наблизивши ліву частину за допомогою інтерполяційних поліномів (3).

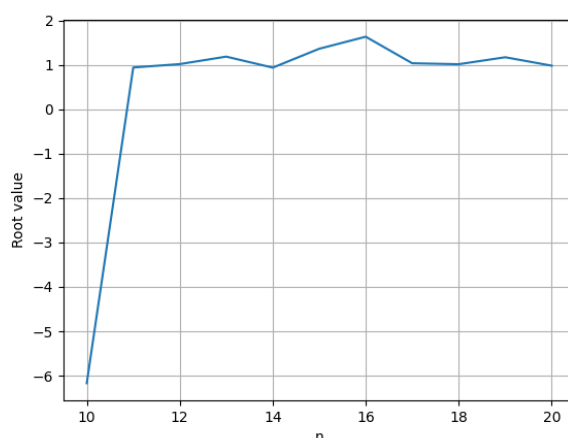
Для прикладу, розглянемо рівняння

$$\sinh x - \cosh \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{4} = 0. \quad (4)$$

Побудувавши графік лівої частини, легко побачити, що дане рівняння має рівно один корінь. В нашому випадку, корінь належить проміжку $[-\pi; \pi]$, то замінимо ліву частину (4) поліномом (3), де

$$f(x) = \sinh x - \cosh \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{4}. \quad (5)$$

В результаті, отримаємо наступні результати, представлені на наступному графіку



Знайшовши середнє значення наближеного значення при

$$11 \leq n \leq 20,$$

отримаємо, що наближене значення кореня рівне

$$x \approx 1.126.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с.
- [2] Koval O., Barabash O., Makarchuk A., Havrylko Y., Musienko A., Salanda I. Comparison of Two Methods of Signal Smoothing in the Development of Navigation Systems 2023 IEEE 7th International Conference on Methods and Systems of Navigation and Motion Control, MSNMC 2023 - Proceedings, pp. 42 - 46.
- [3] Hamming R.W. Digital filters, New Jersey: Prentice-Hall International, 1977.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: `au_andreymakarh2@gmail.com`

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: `bar64@ukr.net`

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: `shapovalovdv@ukr.net`

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

Б.І. МАНІКІН

Позначимо через $\mathcal{B}$ σ -алгебру підмножин X , де X — довільна множина. Нехай також $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — множина всіх випадкових величин на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тоді випадковою, або стохастичною мірою на $\mathcal{B}$ будемо називати σ -адитивне відображення $\mu : \mathcal{B} \rightarrow L_0$.

Будемо розглядати стохастичне рівняння вигляду

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t, x)dt + \sigma(t, x) d\mu(t) = -f(t, x, u(t, x)), (t, x) \in D_T, \\ u(t, x) = 0, (t, x) \in S, \quad u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

де $D = (0, T] \times B$, $T > 0$, B — обмежена область у $\mathbb{R}^d$, $S_T = (0, T] \times \partial B$, $\mathcal{L}$ — параболічний оператор вигляду

$$\mathcal{L}u(t, x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} + c(t, x)u(t, x) - \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}.$$

Відмітимо, що в роботі [1] було розглянуто рівняння теплопровідності, кероване загальною випадковою мірою, при $x \in \mathbb{R}^d$.

Розв'язок (1) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u(t, x) = \int_B G(t, x; 0, y) u_0(y) dy + \int_0^t ds \int_B G(t, x; s, y) f(s, y, u(s, y)) dy + \\ + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t, x; s, y) \sigma(s, y) dy, \end{aligned} \quad (2)$$

де $G(t, x; s, y)$ — функція Гріна крайової задачі $\mathcal{L}u = 0$, $u|_{(t,x) \in S_T} = 0$. Було досліджено, за яких умов на коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$, область B , стохастичну міру μ та функції u_0 , f , σ розв'язок (2) існує, є єдиним у певному сенсі і для довільних $\delta \in (0, T)$, B' , $\bar{B}' \subset B$ задовольняє співвідношення

$$|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)| \leq L(|x_1 - x_2|^{\gamma_1} + |t_1 - t_2|^{\gamma_2}) \text{ м. н.}$$

для всіх $t_1, t_2 \in [\delta, T]$, $x_1, x_2 \in \bar{B}'$, і деяких сталих L , γ_1, γ_2 .

Нехай тепер $T = +\infty$. Тоді розв'язок (1) знову можемо шукати як розв'язок (2). При цьому предметом дослідження стає поведінка розв'язку (2) при $t \rightarrow \infty$. Були знайдені умови на коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$, область B , стохастичну міру μ та функції u_0, f, σ , за яких

$$\sup_{x \in \bar{B}} |u(t, x)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м. н.}$$

У [2] подібний результат було отримано за умови залежності стохастичної міри від просторової змінної.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Боднарчук І.М., Шевченко Г.М. *Рівняння теплопровідності в багатовимірній області із загальною стохастичною мірою* // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2015. — Вип. 93. — С. 7–21.
- [2] Manikin B. *Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure* // Modern Stoch. Theory Appl. — 2022. — Vol. 9, no. 4. — pp. 483–498.

КНУ ім. Т. Г. Шевченка, Київ, Україна
Email address: `bmanikin@knu.ua`

ЕРГОДИЧНІСТЬ ПРОЦЕСІВ ТИПУ ЛЕВІ В $\mathbb{R}^d$

Я.Г. МОКАНУ

Метою даної праці є надання достатніх умов ергодичності процесу типу Леві, генератор напівгрупи якого, визначений на тестових функціях з $C_\infty^2(\mathbb{R}^d)$, має вигляд

$$Lf(x) = l(x)\nabla f(x) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (f(x+u) - f(x) - \nabla f(x) \cdot u \mathbb{I}_{|u| \leq 1}) \nu(x, du),$$

де $\nu(x, \cdot)$ – міра типу Леві та $l: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – дріфт.

Означенні умови надаються в термінах міри типу Леві $\nu(x, \cdot)$ та можуть бути застосованими до випадку відсутності дріфту.

Для доведення виикористовується критерій Фостера-Ляпунова.

Доповідь спирається на результати сумісної праці з В.П. Кноповою.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] V. Knopova, Y. Moku. *Ergodicity of Lévy-type processes in $\mathbb{R}^d$* (in preparation)
- [2] A. Kulik. *Ergodic Behaviour of Markov Processes*. — Berlin: de Gruyter, 2017.
- [3] N. Sandrić. *Ergodicity of Lévy-type processes* // ESAIM: PS — 2016. — V. 20. — pp. 154-177

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: yana.mokanu3075@gmail.com

GENERALIZED SOLVABILITY OF PSEUDO-PARABOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.V. NAZARCHUK

The method of a priori inequalities in negative norms is one of the approaches used to investigate various issues in mathematical modeling, including correctness of the initial-boundary value problem formulation, existence of optimal control, convergence of computational methods, and more.

Using this approach, S.I. Lyashko and his colleagues obtained various results regarding optimization problems for different models described by partial differential equations with partial derivatives [1]. Subsequently, it was found that the method of a priori inequalities in negative norms can be effectively applied to linear integro-differential equations with Volterra-type integral terms as well. For instance, in the work [2], the existence of optimal control for a system described by a pseudo-parabolic integro-differential equation was proven.

Let us assume that the evolution of the system be described by the equation $\mathcal{L}u = f$, with a linear integro-differential operator given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv & - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i t} + a(x) u_t - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + b(x) u + \\ & + \int_0^t \sum_{i=1}^n (K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau))_{x_i} d\tau. \end{aligned}$$

Here, the unknown function $u(x, t)$ describes the system state in the domain $Q = \Omega \times (0, T)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded spatial domain with smooth boundary $\partial\Omega$. The function u satisfies homogeneous Dirichlet-type initial and boundary conditions

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

It is assumed that $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset C^1(\overline{\Omega})$, $a, b \in C(\overline{\Omega})$, and the integral kernels $K_i(x, t, \tau)$ are continuously differentiable with respect to all variables. Further, for all $x \in \Omega$, we suppose that the relations $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a(x) \geq 0$, hold and that there exists $\alpha > 0$, such that the functions $a_{ij}(x)$ satisfy the inequality $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ for all $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

The domain of definition of the operator $\mathcal{L}$ is considered to be the space C_{BR}^∞ , the set of infinitely differentiable functions in the domain $\overline{Q}$, satisfying

the conditions (1). Similarly, let C_{BR+}^∞ be the set of the smooth functions in the domain $\overline{Q}$, satisfying the adjoint conditions

$$v|_{t=T} = 0, \quad v|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

The domain of definition of the adjoint operator $\mathcal{L}^*$ is the space C_{BR+}^∞ , composed of smooth functions in the domain $\overline{Q}$, satisfying the conditions (2).

Let W_{BR} , H_{BR} denote the completions of the space of smooth functions C_{BR}^∞ , satisfying (1) in the norms

$$\|u\|_{W_{BR}} = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{H_{BR}} = \left(\int_Q u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Similarly, let W_{BR+} , H_{BR+} be the completions of C_{BR+}^∞ , satisfying (2) in the same norms. Denote the corresponding negative spaces (with respect to $L_2(Q)$) with W_{BR}^- , H_{BR}^- , W_{BR+}^- , H_{BR+}^- .

In the work [2], a priori inequalities in negative norms were proven for the formulated problem. In particular, the following theorem was established:

Theorem 1. *There exists constants $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ such that for any function $u \in W_{BR}$, the inequalities $\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR+}^-} \geq C_1 \|u\|_{H_{BR}}$, $C_2 \|u\|_{W_{BR}} \geq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR+}^-}$ hold, and for any function $v \in W_{BR+}$, the inequalities $\|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR}^-} \geq C_1 \|v\|_{H_{BR+}}$, $C_2 \|v\|_{W_{BR+}} \geq \|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR}^-}$ hold.*

Additionally, in the works [1] and [2], for all $x \in \Omega$, it was assumed that

$$b_{ij}(x) = b_{ji}(x), \quad (3)$$

$$b(x) \geq 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0. \quad (5)$$

In our work, we prove the theorem 1 without requiring the fulfillment of conditions (3)–(5). Thus, it is demonstrated that the theorems regarding the well-posedness of the initial-boundary value problem and the existence of optimal control from [2] remain valid under weaker assumptions.

REFERENCES

- [1] Lyashko S.I. *Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters*. — London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 466 p.
- [2] Anikushyn A.V., Andaral A.I. *Generalized optimal control of pseudo-parabolic integro-differential systems* // Nonlinear Oscillations. — 2024. — V. 27, No 1. — P. 3–18. (in Ukrainian)

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
 Email address: nazarchukviktoriia@knu.ua

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ КРОВІ У ПОСТКОВІДНОМУ ГІГАНСЬКОМУ КАПІЛЯРІ

В.В. НОВИЦЬКИЙ

1. ВСТУП. АКТУАЛЬНІСТЬ

На сьогоднішній день математичне моделювання та дослідження постковідних трансформацій в капілярах набуло своєї актуальності.

В даній тезі запропоновано математичну модель руху крові у постковідному гігантському капілярі. Проблематикою його утворення є наявність сформованого великого м'якого тромба в області перехідного колінця від артеріоли до венули.

Наші практичні дослідження цього феномену за допомогою Технології Судинного Скринінгу [1] наочно показали, що рух крові в таких капілярах є різко обмеженим і концентрується між стінкою капіляра та м'яким тромботичним утворенням. Така ситуація призводить до сповільнення кровообігу та обмінних процесів, що викликає порушення функції капілярного мережива.

2. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Для математичного дослідження такої моделі взято систему рівнянь Нав'є—Стокса для в'язкопружної рідини[2]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{P}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{P}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Технологія Судинного Скринінгу застосовувалася для збору реальних даних про швидкість та напрямок руху крові в капілярах. При побудові математичної моделі було виявлено значне зниження швидкості кровотоку, що корелює з розмірами та розташуванням тромбів. Розроблена модель дозволяє прогнозувати динаміку змін у кровотоці залежно від розміру та властивостей тромбу.

3. Висновки

Результати моделювання підтверджують гіпотезу про те, що тромби значно модифікують звичайний рух крові, спричиняючи ризики для здоров'я, особливо після перенесеного COVID-19. Розглянута математична модель може бути використана для розробки нових методик лікування та профілактики постковідних ускладнень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Лущик У.Б. та інш. **Сучасні можливості цілісної функціональної оцінки артеріовенозної рівноваги в замкнутій судинній системі макро- і мікро-рівні** // Київ. — 2006.
- [2] Wirz H.J. Smolderen J.J. **Numerial methods in fluid dynamics**. — von Karman Institute for Fluid Dynamics Rhode—Genese, Belgium, 1978.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАНУ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: vivi.novytsky@gmail.com

АНАЛІЗ КОРПУСУ УКРАЇНСЬКОЇ МОВИ МЕТОДАМИ МОДЕЛІ ПРИХОВАНОГО ЛАНЦЮГА МАРКОВА

Є.М. ОКУНЄВ

В цьому дослідженні ми проаналізували фрагмент корпусу української мови методами, розробленими для аналізу моделі прихованого ланцюга Маркова, аналогічно до дослідження [1]. В межах моделі розвиваються два випадкові процеси: процес Маркова, за яким ми не можемо спостерігати та який, певним чином, впливає на еволюцію другого - спостережуваного процесу. Модель прихованого ланцюга Маркова формально визначається як впорядкована трійка $\lambda = (\pi, A, B)$, де π - вектор розподілу початкового стану прихованого процесу Маркова, A - матриця перехідних ймовірностей прихованого процесу Маркова та B - матриця умовних ймовірностей спостережуваного процесу для різних станів прихованого процесу Маркова. Хоча у визначенні про це не йшлося, для подальшої роботи нам також знадобиться вектор із інформацією про перебіг спостережуваного процесу O .

Найцікавішим результатом теорії моделей прихованого ланцюга Маркова є алгоритм Баума-Велша. Це ітеративний алгоритм, який модифікує параметри моделі, щоб максимізувати ймовірність вектору спостережень O [2]. Якщо розглядати модель прихованого ланцюга Маркова як нейронну мережу, то застосування алгоритму Баума-Велша відповідає процесу неконтрольованого навчання нейронної мережі. Ми застосували алгоритм Баума-Велша до частини корпусу української мови в якості вектора спостережень та розділили літери українського алфавіту на 2, 3 та 4 статистично значущі групи. Також ми провели порівняльний аналіз відомими розподілами літер на групи, що застосовуються в українській філології: наприклад поділ літер українського алфавіту на дві статистично значущі групи в результаті дає поділ літер на голосні та приголосні.

Наведемо таблицю розподілу літер на дві групи: на перетині рядку i та стовпця j знаходяться наступні ймовірності:

$P(\text{Спостерігаємо літеру } X_i | \text{Літера належить до групи } j)$

Можна побачити, що більшість літер мають одну нульову та одну ненульову умовні ймовірності належності до певної групи. В дослідженні

ми вважаємо, що літера належить до тої групи, де умовна ймовірність - найбільш. В результаті розподілу літер на дві статистично значущі групи алгоритм Баума-Велша розділив літери на голосні та приголосні із високою точністю. Алгоритм зробив хибний висновок про літери ґ,є,ї,ь. Достеменно не можна сказати чим викликані ці помилки, але можна зробити обмірковані здогадки: ґ - дуже рідкісна літера і висновок стане правильним при застосуванні більшої частини корпусу; є,ї - дифтонги, які починаються на звук [й]; ь - літера, яка не має власного звуку і, відповідно, не відноситься до жодної з груп.

Філологічні відомості для інтерпретації результатів взяті з [3] .

ТАБЛ. 1. Розподіл літер на дві групи

Літера	Група 1	Група 2	Літера	Група 1	Група 2
А	0.21239	0	Н	0	0.09203
Б	0	0.03651	О	0.20561	0
В	0	0.09022	П	0.00010	0.042601
Г	0	0.02689	Р	0	0.06599
ґ	0.00003	0	С	0.00049	0.07362
Д	0	0.05632	Т	0	0.09845
Е	0.12115	0	У	0.08790	0
Є	0	0.01750	Ф	0	0.00021
Ж	0	0.02053	Х	0	0.02239
З	0.00166	0.03692	Ц	0	0.00786
И	0.15188	0	Ч	0	0.02564
І	0.10994	0.00047	Ш	0	0.01918
Ї	0.00290	0.00603	Щ	0	0.01180
Й	0	0.02461	Ь	0.04635	0
К	0	0.07672	Ю	0.00847	0.01119
Л	0	0.07247	Я	0.05072	0.00911
М	0	0.05460			

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. L. Cave and L. P. Neuwirth, Hidden Markov models for English, Princeton, NJ, IDA-CRD, October 1980.
- [2] Nejati, A., Unsworth, C. (2014). A Concise Information-Theoretic Derivation of the Baum-Welch algorithm. arXiv preprint arXiv:1406.7002.
- [3] Наконечна, Л. Б. (2014). Сучасна українська мова. Фонетика. Орфоєпія. Морфологія. Графіка. Орфографія (видання 2-е). Івано-Франківська, НАІР.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: egorky96@gmail.com

МЕТОДИ ІМПУТАЦІЇ ПРОПУЩЕНИХ ДАНИХ

I.B. РОЗОРА, С.О. ОЛАСЮК, А.О. МЕЛЬНИК

В сучасному світі перед нами постає багато задач, що вимагають обробки і дослідження масивів даних. Поширеною проблемою, яка виникає при роботі з ними є відсутність частини значень. Задачі обробки пропущених значень присвячено багато наукових робіт, одні з найбільш популярних методів, які розглянуті в даній роботі: метод середніх, метод k -найближчих сусідів, метод гарячого набору.

Найпростішим підходом, очевидно, є метод середніх, але заміна всіх відсутніх значень середнім може викривити дисперсію та коваріацію. Метод k -найближчих сусідів, натомість, ідентифікує k найбільш схожих значень з масиву та заповнює порожні значення шляхом усереднення "сусідніх хоча такий спосіб не підходить якщо відсутніх значень забагато. Існують декілька варіантів методу гарячого набору, їх суть полягає в знаходженні патернів і заміни відсутнього значення з групи даних на значення зі співставного набору, перевагою способу є збереження внутрішньої структури даних.

В даній роботі застосовано три вищеописані підходи до одного набору даних, САС 40 Index, з якого випадковим чином вилучено 5 відсотків даних. Вірогідність видалення однакова для кожного значення масиву, з масиву вилучаються значення з індексами, отриманими за допомогою генератора випадкових чисел. Для роботи з даними використано програмне середовище R.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] 5. Little R., Rubin D. *Statistical Analysis with Missing Data (3rd Edition)*. 2020 by John Wiley and Sons, Inc
- [2] Stef van Buuren. *Flexible Imputation of Missing Data (1st Edition)*. 2012 by Taylor and Francis Group, LLC

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ, Україна
Email address: irozora@knu.ua

НТУУ "КПІ ім. І. Сікорського Київ, Україна
Email address: nameisneedfull@gmail.ua

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ, Україна
Email address: melinik2011@gmail.com

STRONG CONSISTENCY OF DISCRETE ESTIMATORS FOR DRIFT PARAMETERS IN THE COX–INGERSOLL–ROSS MODEL

O.D. PRYKHODKO, K.V. RALCHENKO

In the paper [1], a new model for analyzing interest rates, which is called the Cox–Ingersoll–Ross process, was introduced. This model is described by the following stochastic differential equation:

$$r_t = r_0 + \int_0^t (a - br_s) ds + \int_0^t \sigma \sqrt{r_s} dW_s, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

where r_0 , a , b and σ are positive constants and $W = \{W_t, t \geq 0\}$ is a Wiener process.

The Cox–Ingersoll–Ross model is important and popular. It is used in many areas, for example, in the pricing of interest rate derivatives and as a model of stochastic volatility. Thus parameter estimation is significant for the practical application of this model.

We are interested in developing theoretical estimators for parameters (a, b) when σ is known for models based on discrete observations. Additionally, we aim to explore how estimators designed for continuous data can be adapted for the case of discrete observations. Therefore in this study we investigate the discrete counterparts of the strongly consistent estimators introduced in [2, Theorem 5].

To construct the estimators, we use an equidistant partition of the interval $[0, n]$, $n > 0$, with a step size $\delta_n = n^{-\beta}$, where $\beta > 0$. Also, two additional notations are introduced: the number of observations, denoted as $m_n = n^{\beta+1}$, and the observation moments, denoted as $t_k = \frac{k}{n^\beta}$.

Our estimates for parameters a and b on the interval $[0, n]$ are the following:

$$\hat{a}_n = \frac{\frac{\sigma^2}{2} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k} \delta_n \right)^2}{n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k} \delta_n \right)^2}, \quad \hat{b}_n = \frac{\frac{\sigma^2}{2} \cdot n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k} \delta_n}{n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k} \delta_n \right)^2}.$$

We have acquired the rate of convergence of certain stochastic integrals and sums from estimators $\hat{a}_n$ and $\hat{b}_n$. The main results are summarized in the following two theorems.

Theorem 1. For $2a > \sigma^2$ and $\beta > 0$ the following convergence is true

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n \rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{a\sigma^2}{2b^2} \text{ a.s., as } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Moreover, for any $q \geq 1$

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a\sigma^2}{2b^2} \right) \right|^q \leq C n^{-\frac{(\beta \wedge 1)q}{2}}. \quad (3)$$

Theorem 2. Assume that $2a > \sigma^2$. Then the following convergences hold a.s. as $n \rightarrow \infty$:

$$\hat{a}_n \rightarrow a, \quad \hat{b}_n \rightarrow b,$$

i.e. $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ are strongly consistent estimators of the parameters a, b respectively.

Acknowledgment. The second author is supported by the Research Council of Finland, decision no. 359815.

REFERENCES

- [1] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. *A Theory of the Term Structure of Interest Rates* // *Econometrica*. — 1985. — V. 53, No 2. — P. 385–407.
- [2] Dehtiar O., Mishura Y., Ralchenko K. *Two methods of estimation of the drift parameters of the Cox–Ingersoll–Ross process: continuous observations* // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. — 2022. — V. 51, Iss. 19. — P. 6818–6833.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
 Email address: prykhodkood@gmail.com

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
 Email address: kostiantynralchenko@knu.ua

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗРАХУНКУ СТРАХОВОЇ ПРЕМІЇ ЗА ДОГОВОРАМИ ОСЦПВ

Е.В. СІКОЛЕНКО, О.І. ВАСИЛИК

Страхова премія (далі — СП) складається з двох основних частин: нетто-премія (далі — НП) та відсоток навантаження (далі — ВН). НП виражає ціну страхового ризику, в той час як навантаження містить в собі прибуток страховика та витрати на ведення справи (для ОСЦПВ — не більше ніж 20%). НП залежить від страхових сум (далі — СС) та страхових виплат (далі — СВ) та розраховується на 100 грн СС за наступною формулою [1]:

$$\text{НП} = \frac{\sum \text{СВ}}{\sum \text{СС}} * 100 \quad (1)$$

В свою чергу СП за договором обчислюється за формулою [1]:

$$\text{СП} = \frac{\text{НП}}{100 - \text{ВН}} \quad (2)$$

Проте відповідно до положення МТСБУ про перелік, значення та порядок застосування коригуючих коефіцієнтів під час укладання страховиками договорів ОСЦПВ (далі — Положення), СП розраховується як множення базового платежу (далі — БП), що встановлюється МТСБУ, на визначені коефіцієнти. Однак, Положення визначає мінімальні та максимальні допустимі значення цих коефіцієнтів, а БП востаннє змінювався 30 серпня 2010 року та становить 180 грн, незважаючи на те, що за цей проміжок часу СС за договором збільшилась втричі. Перелічене формує проблематику даного підходу.

Коригуючі коефіцієнти впливають на СП в залежності від типу транспортного засобу (далі — ТЗ) ($K_{\text{ТЗ}}$), місця реєстрації ТЗ ($K_{\text{мр}}$), типу страхувальника ($K_{\text{тс}}$), сфери використання ТЗ ($K_{\text{св}}$), періоду використання ТЗ ($K_{\text{пв}}$), показника збиткоості страховика ($K_{\text{зб}}$), строку дії договору страхування ($K_{\text{сд}}$), способу укладання договору ($K_{\text{суд}}$), коефіцієнту бонус-малус ($K_{\text{бм}}$).

Загальна формула розрахунку СП має вигляд:

$$\text{СП} = \text{БП} * K_{\text{ТЗ}} * K_{\text{мр}} * K_{\text{тс}} * K_{\text{св}} * K_{\text{пв}} * K_{\text{зб}} * K_{\text{сд}} * K_{\text{суд}} * K_{\text{бм}}$$

Аналіз страхових тарифів показав, що страховики використовують максимальні допустимі значення всіх коефіцієнтів, окрім коефіцієнта $K_{\text{зб}}$, за допомогою якого відбувається коригування тарифів. Деякі страховики

при цьому збільшують допустимі значення коефіцієнтів $K_{ТЗ}$, $K_{МР}$, $K_{ТС}$ за рахунок коефіцієнта $K_{ЗБ}$. Дана політика страхових компаній негативно впливає на страховий ринок, адже така методика розрахунку не є прозорою для клієнтів.

Враховуючи вищевказане пропонується оптимізація методики розрахунку відповідно до формули (1), при якій показники НП для типу та місця реєстрації ТЗ вважатимуться як БП, в той час як тип страхувальника, сфера використання ТЗ будуть коригуючими коефіцієнтами, що розраховуються як відношення значення НП до мінімальної НП. Використання коефіцієнтів періоду та строку дії договору пропонується залишити без змін. Страховикам також пропонується використовувати в довільний спосіб власні коригуючі коефіцієнти, наприклад вік страхувальника, стаж водіння тощо за погодженням з регулятором.

Приведемо приклад розрахунку БП для показника місце реєстрації ТЗ:

Зона	1	2	3	4	5	6
$\sum$ СП, млн. грн	6.632	0.790	0.073	0.962	2.912	0.035
К-сть договорів	3 160	519	58	845	3 896	16
$\sum$ СВ, млн. грн	3.215	0.360	0.041	0.424	0.568	0.023
К-сть виплат	93	12	2	19	57	1
$\sum$ СС, млн. грн	1 516	249	28	406	1 870	8
$НП_{МР}$	0.21	0.14	0.15	0.10	0.03	0.30

Дана таблиця заповнюється для кожного коефіцієнта. Таким чином формула розрахунку загальної НП за договором матиме вигляд:

$$НП = (НП_{МР} + НП_{ТЗ}) * \frac{НП_{ТС}}{\min(НП_{ТС})} * \frac{НП_{СВ}}{\min(НП_{СВ})} * K_{ПВ} * K_{СД}$$

Загальна СС за договором ОСЦПВ складає 480 000 грн., отже отримане значення НП за 100 грн страхової суми необхідно домножити на 4 800. Надалі необхідно розрахувати значення СП за формулою (2). Моделювання показало, що отримані тарифи є актуальними та повторюють загальну тенденцію ринку, при цьому розрахунок тарифів став прозорим та здатним швидко адаптуватися під зміни на ринку страхування.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ковтун І.О. *Основи актуарних розрахунків* — К.: Алерта, 2004. — 328 с.
- [2] Олійник В.М. *Економіко-математичне моделювання в розвитку страхування та управління страховими тарифами* — Суми: Університетська книга, 2018. — 366 с.

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ СТОХАСТИЧНИМИ КЛІТИННИМИ АВТОМАТАМИ

Д.Ю. СЛУЧИНСЬКИЙ

У роботі розглядаються задачі керування випадковими полями на графах [1] та їх застосування до стохастичних клітинних автоматів. Моделлю є система стохастичних клітинних автоматів, яка являє собою скінченний неорієнтований граф, де кожен автомат взаємодіє тільки зі своїми сусідами. Кожен з автоматів перебуває в одному зі станів та приймає вхідні сигнали, які є керуванням. Ймовірність переходу між станами автоматів залежить від вхідних сигналів та станів сусідів. Функцією втрат є сумарні збитки від зміни стану системи та керування. Метою є знаходження оптимального керування (стратегії) яке мінімізує середні втрати системи за одиницю часу. Для великих систем задача оптимізації є складною або неможливою через важкі розрахунки. Тому запропоновано використовувати локальні стратегії замість глобальних, щоб забезпечити зменшення кількості обчислень.

Дані теоретичні результати були використані для моделювання процесу керування розповсюдженням лісових пожеж [2], де територія лісу розглядається як двовимірна сітка. Кожна клітина на сітці є частиною лісу і має один зі станів: Alive (живий), Fire (горить) або Burnt (згорів). Для керування пожежею вводиться множина рішень для кожної клітини: Extinguish (гасити), Leave (залишити). Була реалізована програма на мові програмування Python. В кожен час $t = 0, 1, 2, \dots$ вона знаходить оптимальне керування та реалізує його. Користувач має змогу спостерігати за зміною системи на графічному інтерфейсі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. K. Chorney, H. Daduna, P. S. Knopov. *Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications*. — Boston/Dordrecht/London: Springer, 2006. — 261 с.
- [2] Almeida R. M., Macau E. *tochastic cellular automata model for wildland fire spread dynamics* // Journal of Physics: Conference Series. — 2011.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ» , Київ, Україна
Email address: d.sluchynskyi@ukma.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ГРАНИЧНИХ ТЕОРЕМАХ, ПОВ'ЯЗАНИХ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ ЗАДАЧЕЮ ПРО ДНІ НАРОДЖЕННЯ

В. В. СТАМАТІЄВА

Задача про дні народження разом зі спорідненою задачею збирача купонів слугують класичними прикладами задач про випадкові розміщення. Ми пропонуємо новий підхід до виведення граничних теорем для різних характеристик у цій задачі, заснований на застосуванні «грубої» збіжності спеціально побудованих випадкових точкових мір (див. [1], [2]).

Розглянемо послідовність об'єктів, що надходять у дискретні моменти часу, або під час стрибків деякого однорідного процесу Пуассона. Кожен об'єкт належить до одного з n фіксованих типів. Тобто кожен об'єкт, що надходить, має тип $k, k \leq n$, з імовірністю $\frac{1}{n}$, незалежно від інших об'єктів. Для зручності ми можемо уявити, що повторна поява об'єкта попереднього типу знаменує собою початок збору другої колекції; так само поява будь-якого типу втретє ініціює збір третьої колекції, тощо.

В узагальненій задачі про дні народження розглядаються випадкові величини, які описують момент першої (або m -ї) появи об'єкта в другій (або $(r+1)$ -й) колекції. Зокрема, викликають інтерес і більш складні характеристики, наприклад, інтервали часу між початками різних колекцій або кількість об'єктів у першій колекції на момент, коли розпочнеться $(r+1)$ -а, тощо.

Ідея запропонованого підходу полягає в тому, щоб розглядати моменти надходження об'єктів у різні колекції як атоми випадкової точкової міри на $\mathbb{R}$ (для аналізу конкретної колекції) або на об'єднанні злічуваної множини копій $\mathbb{R}$ (для вивчення всіх колекцій одночасно). Можна показати, що ці точкові процеси після певного центрування та нормування грубо збігаються до певного неоднорідного процесу Пуассона при $n \rightarrow \infty$. Застосовуючи теорему про неперервне відображення, ця збіжність дозволяє нам довести граничні теореми для ряду цікавих характеристик у задачі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ilienکو Andrii. Convergence of point processes associated with coupon collector's and Dixie cup problems // Electron. Commun. Probab. — 2019. — Vol. 24. — P. 9. — Id/No 51.

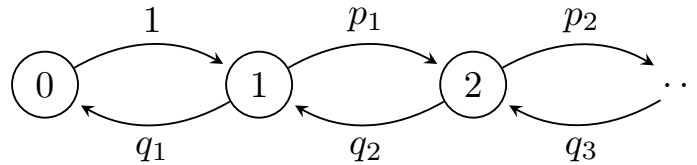
- [2] Ільєнко А. Б., Стаматієва В. В. Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження // Науковий вісник Ужгородського університету. — 2021. — Vol. 39, no. 2. — P. 38–46.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: stamatieva56@gmail.com

НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА ВИБУХУ ДЛЯ НАПІВМАРКОВСЬКИХ БЛУКАНЬ НАРОДЖЕННЯ ТА ЗАГИБЕЛІ

А.Ю. ПИЛИПЕНКО, В.В. ТКАЧЕНКО

Нехай $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ — це марковський ланцюг народження та загибелі на фазовому просторі $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ з такими перехідними імовірностями: $p_i = p_{i,i+1} > 0$, $q_i = p_{i,i-1} > 0$, $p_0 = 1$, $p_i + q_i = 1$, $i \geq 1$.



Визначимо *напівмарковський процес* $(X(t))_{t \geq 0}$ із вкладеним ланцюгом Маркова $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ наступним чином. Нехай $\{\tau_n^i\}_{n \geq 0}$, $i \in E$ — це сукупність послідовностей додатніх н.о.р.в.в. Визначимо випадкові моменти стрибків рекурентним чином: $T_0 = 0$, $T_{n+1} = T_n + \tau_n^{X_n}$, $n \geq 0$, та покладемо $X(t) = X_n$ при $t \in [T_n, T_{n+1})$, $n \geq 0$.

Позначимо $\sigma_L = \inf\{t \geq 0 \mid X(t) = L\}$ момент досягнення рівня L . Назвемо $\sigma = \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_L$ *моментом вибуху* процесу X . Позначимо $\varphi_i(\lambda) = \mathbb{E} e^{-\lambda \tau_n^i}$ перетворення Лапласа часу, який X проводить у стані i до стрибка.

Теорема 1. *Мають місце наступні еквівалентності:*

$$(1) \quad \mathbb{P}\{\sigma < \infty\} = 1 \iff \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m (1 - \varphi_i(\lambda)) \frac{q_{i+1} \cdots q_m}{p_i \cdots p_m} < \infty;$$

$$(2) \quad \mathbb{P}\{\sigma = \infty\} = 1 \iff \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m (1 - \varphi_i(\lambda)) \frac{q_{i+1} \cdots q_m}{p_i \cdots p_m} = \infty.$$

Приклад 1. *Випадок марковського процесу, тобто коли $\tau_n^i \sim \text{Exp}(a_i)$, було досліджено у роботі [1]. Там умовою для скінченності моменту σ є збіжність ряду $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m \frac{1}{a_i} \frac{q_{i+1} \cdots q_m}{p_i \cdots p_m}$, що рівносильно умові (1). У випадку*

$p_i = p > \frac{1}{2}$ ця умова спрощується до збіжності ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k}$.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Dynkin E. B., Yushkevich A. A., *Markov processes*, Plenum Press, 1969.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: pilipenko.ay@gmail.com

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: v.tkachenko@gmail.com

УЗАГАЛЬНЕННЯ ВІДОБРАЖЕННЯ СКОРОХОДА ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ ПРОЦЕСІВ

А.Ю. ПИЛИПЕНКО, І.П. ЧУЛАКОВ

А. Скороход в 1961 році у роботі [1] сформулював задачу про відбиття, яка згодом виявилась ефективним методом для побудови дифузій з відбиттям. На основі цієї задачі про відбиття побудоване відображення, яке ставить у відповідність функції розв'язок задачі Скорохода про відбиття для цієї функції. Це відображення виявилось корисним для розв'язання різноманітних задач теорії масового обслуговування (дивіться наприклад [2, 3, 4]). Задача Скорохода про відображення узагальнювалася різними авторами. Зокрема, А. Пилипенко в статті [5] поставив задачу про стрибкоподібне відбиття — і ця робота дозволила будувати броунівський рух зі стрибкоподібним відбиттям (дивіться статті [6, 7]). В статті [8] А. Пилипенко і А. Саранцев розглянули систему з перемиканнями і в результаті певних граничних переходів могли отримувати у границі класичне відбиття Скорохода, відбиття з затримкою, абсорбуюче відбиття та відбиття зі стрибкоподібним виходом з межі.

Нехай f та g — дві неперервні функції. Ми хочемо побудувати таку динаміку, у якій прирости будуть співпадати з приростами f у верхній півплощині і з приростами g у нижній. Для цього спочатку введемо рівень $\delta > 0$ і розглянемо динаміку з перемиканнями в момент досягнення певних рівнів. А саме, ми починаємо з динаміки f в момент $t = 0$ і, коли $f(t)$ потрапить в проміжок $[-\delta, -\infty)$, ми перемикаємося з динаміки f на динаміку g . Потім перемикаємося з динаміки g на f , коли потрапляємо в проміжок $[0, \infty)$. Потім знову перемикаємося на динаміку g при досягненні рівня $[-\delta, -\infty)$. І так далі. Побудовану за такими правилами функцію будемо позначати $\mathcal{G}_\delta(f, g)$. Наша мета — спрямувати δ до нуля і знайти границю динаміки з перемиканнями $\mathcal{G}_\delta(f, g)$.

Введемо позначення:

$$m_f(t) := - \min_{s \in [0, t]} (f(s) \wedge 0), \quad m_g(t) := \max_{s \in [0, t]} (g(s) \vee 0).$$

Нехай $F(t)$ — монотонна (не строго) функція. Будем називати число C рівнем сталості функції F , якщо існують $t_1 < t_2$: $f(t_1) = f(t_2) = C$.

Теорема 1. *Якщо функції $m_f(t)$ і $m_g(t)$ не мають жодного спільного рівня сталості, то існує неперервна функція $\mathcal{G}$ така, що $\mathcal{G}_\delta(f, g) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} \mathcal{G}$ локально рівномірно. Ця функція $\mathcal{G}$ задається формулою*

$$\mathcal{G}(t) = f(\tilde{T}_F(t)) + g(\tilde{T}_G(t)), \quad t \geq 0,$$

де пара функцій $\tilde{T}_F, \tilde{T}_G$ — це єдиний розв’язок системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} m_f(T_F(t)) = m_g(T_G(t)) \\ T_F(t) + T_G(t) = t. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Skorokhod A. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region // Theory of Probability & Its Applications. — 1961. — Vol. 6, no. 3. — P. 264–274.
- [2] Asmussen S. Applied probability and queues. — Springer, 2003. — Vol. 2.
- [3] Kushner HJ. Heavy traffic analysis of controlled queueing and communication networks. — Springer, 2001. — Vol. 28.
- [4] Whitt W. Stochastic-process limits: an introduction to stochastic-process limits and their application to queues // Space. — 2002. — Vol. 500. — P. 391–426.
- [5] Pilipenko A. On the Skorokhod mapping for equations with reflection and possible jump-like exit from a boundary. // Ukrainian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 63, no. 9.
- [6] Pilipenko A., Prykhodko Y. Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theory of Stochastic Processes. — 2014. — Vol. 19, no. 1. — P. 52–61.
- [7] Iksanov A., Pilipenko A., Povar B. Functional limit theorems for random walks perturbed by positive alpha-stable jumps // Bernoulli. — 2023. — Vol. 29, no. 2. — P. 1638–1662.
- [8] Pilipenko A., Sarantsev A. Boundary Approximation for Sticky Jump-Reflected Processes on the Half-Line // Electronic Journal of Probability. — 2023.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: pilipenko.ay@gmail.com

КНУ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: igorchzpua@gmail.com

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЄРМАКОВА – ПІННІ

Я.О. ШЕВЧУК

Різноманітні задачі квантової механіки, ядерної фізики, космології, теорії коливань описуються рівнянням Єрмакова–Пінні

$$y'' + p(x)y = \frac{c}{y^3}, \quad (1)$$

де $p(x) \in C(a; b)$, $c \in R$ – деяка стала.

Загальний розв'язок рівняння (1) у 1880 р. знайшов В.П. Єрмаков, а у 1950 р. Е. Пінні вказав ідентичний спосіб побудови загального розв'язку рівняння (1). При цьому загальний розв'язок рівняння (1) аналітично виражається через лінійно незалежні розв'язки відповідного лінійного однорідного рівняння. Разом з тим фундаментальна система розв'язків зазначеного рівняння, зазвичай, невідома і не існує ефективних методів її знаходження.

У даній роботі побудовано асимптотичний розв'язок задачі Коші для рівняння (1). Отже, нехай в околі точки $x_0 \in (a; b)$ функція $p(x)$ зображується асимптотичним рядом

$$p(x) = \sum_{s \geq 0} p_s(x - x_0)^s, \quad p_s \in R.$$

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0 \neq 0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (2)$$

шукаємо у вигляді

$$y(x) = y_0 + y'_0(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (3)$$

Формально підставимо ряд (3) у рівняння (1) і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях $x - x_0$:

$$(n+1)(n+2)y_0^3 a_{n+2} = \phi_n(y_0, y'_0, a_2, \dots, a_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Тоді, якщо $y_0 \neq 0$, то з алгебраїчної системи (4) можна знайти коефіцієнти асимптотичного ряду (3) для будь-якого n . В околі точки x_0 певна кількість членів ряду (3) з наперед заданою точністю задовольняє задачу Коші (1), (2).

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: jaroslava.shevchuk@gmail.com

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЮВАННЯ φ -СУБГАУССОВОГО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

К.І. ШУРУБУРА

У роботах [1, 2] запропоновано алгоритм моделювання процесів строго φ -субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0; 1])$, але не розглядалася задача оптимізації параметрів моделі.

В даній роботі для φ -субгауссового узагальненого дробового броунівського руху з функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $|x| \geq 1$, $\omega \geq 2$, знайдено оптимальні значення параметрів моделі.

Означення 1. [1] Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Для N-функції φ виконується умова Q, якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

Означення 2. [1] Нехай φ — N-функція Орліча, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ -субгауссових випадкових величин), якщо $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $\mathbb{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda))$.

Означення 3. [1] Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ -субгауссовим (тобто, належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$. Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Означення 4. [1] Будемо називати центрований випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ строго φ -субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ -УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$, якщо Z_H є строго φ -субгауссовим та $R_H(t, s) = \mathbb{E}Z_H(s)Z_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s - t|^{2H})$.

Означення 5. Модель $\tilde{Z}$ наближає процес Z із заданими надійністю $1 - \nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0, 1])$, якщо

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |Z(t) - \tilde{Z}(t)| > \delta \right) \leq \nu.$$

Розглядається модель φ -субгауссового узагальненого дробового броунівського руху на основі розкладу в ряд:

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{n=1}^N \left(\tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) \xi_n + \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) \eta_n \right), \quad (1)$$

де $t \in [0, 1]$, $\tilde{c}_n$ та $\tilde{d}_n$ – деякі сталі, $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ – наближені значення нулів функцій Бесселя першого роду J_{-H} та J_{1-H} відповідно, ξ_n, η_n – незалежні однаково розподілені випадкові величини з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\mathbb{E}\xi_n^2 = \mathbb{E}\eta_n^2 = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Припустимо, що похибка наближення для значень $\tilde{c}_n, \tilde{d}_n, \tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ відсутня.

Наступна теорема містить основний результат даного дослідження.

Теорема 1. *Нехай процес Z є сепарабельним строго φ -субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$ та функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $|x| \geq 1$, $\omega \geq 2$. Модель (1) наближає процес Z із заданими надійністю $1 - \nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в просторі $C([0, 1])$, якщо виконуються такі нерівності:*

$$N \geq \left(\frac{a_\varphi}{\delta} \sqrt{\frac{5c}{2H}} \right)^{\frac{1}{H}} + 1 \quad \text{та} \quad \frac{\pi^2 N^2}{8} \exp \left[\frac{1}{H(1-x_G)} - \frac{1}{q} \left(\sqrt{G} - 1 \right)^q \right] \leq \nu,$$

де

$$G = \frac{N^{2H} \delta^2 2H}{5ca_\varphi^2}, \quad x_G = R \left(\frac{8G}{5} \left(\frac{G^{\frac{1}{\omega-1}}}{(1-y_G)^2} \right)^{\frac{1}{y_G}} \right), \quad y_G = R \left(G^{\frac{1}{2(\omega-1)}} \right),$$

$c = \frac{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{\pi^{2H+1}}$, $q : \frac{1}{\omega} + \frac{1}{q} = 1$, та $R(p)$ – розв’язок наступного рівняння відносно z :

$$\frac{1}{1-z} + \ln(1-z) - \ln p - 1 = 0, \quad \text{для } z \in (0, 1), p > 1.$$

При цьому значення параметрів моделі є оптимальними, тобто, дають можливість визначити мінімально необхідну кількість доданків N у моделі (1).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. *φ -субгауссові випадкові процеси*. К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. 231 с.
- [2] Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. *Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ -Processes: A Series Expansion Approach* // Methodology and Computing in Applied Probability. 2005. **7**. Р. 379–400.

Київський політехнічний інститут Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: shurubura@hotmail.com

ПОЛІНОМИ ЧЕБИШЕВА В ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ

А.Ю. МІЩУК, А.М. ШУТОВСЬКИЙ

Поняття функції є одним із фундаментальних понять у математичному аналізі. Однак, не менш фундаментальним є також і поняття класу функцій, бо саме це і визначає подальший характер дослідження функції. Якщо задача прикладного характеру є тісно пов'язаною з періодичними явищами, то в таких випадках доводиться мати справу з періодичними функціями. Добре відомим є той факт, що періодична функція може бути представлена у вигляді тригонометричного ряду, тобто ряду Фур'є.

Але якщо функція $f(x)$ визначена на скінченному відрізку (наприклад $|x| \leq 1$), то її представлення у вигляді тригонометричного ряду вже не є можливим. У такій ситуації доволі корисними виявляються поліноми Чебишева [1, 2], які в теорії наближень [3] можуть бути основою для побудови наближувального агрегату

$$f(r, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} c_{\nu} T_{\nu}(x), \quad (1)$$

де $T_0(x) = \sqrt{1/\pi}$ та $T_k(x) = \sqrt{2/\pi} \cos(k \arccos x)$ ($k \in \mathbb{N}$).

На додаток до оператора (1), який називається інтегралом Чебишева-Пуассона, доволі широкоживаним у теорії наближень є бігармонійний оператор Чебишева-Пуассона. Однак, існує так званий узагальнений інтеграл Чебишева-Пуассона, який увібрав у себе два вищезгадані оператори. Тому в даному дослідженні поставлено за мету дослідити деякі досі нерозглядувані апроксимативні властивості узагальненого оператора Чебишева-Пуассона для функцій класу Ліпшиця.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Fox L., Parker I. B. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis. — Oxford University Press London, 1968.
- [2] Mason J. C., Handscomb D.C. Chebyshev Polynomials. — Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [3] Trefethen L. N. Approximation theory and approximation practice. — SIAM, 2013.

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: anton.mi.ju@gmail.com

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: sh93ar@gmail.com

ПРО ТРАНЗИЄНТНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТИБКАМИ

В.К. ЮСЬКОВИЧ

Нехай X – розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-), u)\tilde{N}(du, dt),$$

де W – вінерівський процес, $\tilde{N}$ – компенсована пуассонівська випадкова міра, що відповідає пуассонівській випадковій мірі N на множині $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ з мірою інтенсивності $\nu(du) \cdot dt$, причому процес W та випадкова міра $\tilde{N}$ незалежні.

Теорема 1. *Нехай $\delta > 0$. Припустимо, що:*

- (А) *функції a, b, c задовольняють локальну умову Ліпшиця;*
- (Б) *функція a обмежена та, крім того, відокремлена від нуля поза відрізком:*

$$\exists \underline{A} > 0 \quad \forall x \notin [-\delta, \delta] \quad a(x) \geq \underline{A};$$

- (В) *функції b, c задовольняють умову степеневого зростання*

$$\exists C \geq 0 \quad \exists \beta \in [0, \frac{1}{2}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad b^2(x) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u)\nu(du) \leq C \left(1 + (x^2)^\beta\right),$$

а також умову локальної невинудженості:

$$\forall R \geq 2\delta \quad \exists \underline{C} > 0 \quad \left[\begin{array}{ll} \forall x \in [-2\delta, R] & |b(x)| \geq \underline{C}, \\ \forall x \in [-2\delta, R] & \int_{\mathbb{R}} c(x, u)\nu(du) \geq \underline{C}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Тоді $X(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Yuskovych V. K. On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space. *Theory of Stochastic Processes*. 2023. Vol. 27, No. 1. P. 53–66.
- [2] Юськович В. К. Про асимптотику розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками. *Український математичний журнал*. 2023. Вип. 75, № 11. С. 1570–1584.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: v.yuskovych@kpi.ua

Секція 2. «Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу»

Керівники: Працьовитий Микола Вікторович, Барановський Олександр
Миколайович

ЗАСТОСУВАННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ЛЮРОТА У ФРАКТАЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ФУНКЦІЙ

Н.А. БІЛОВИЦЬКА

Числовим *додатним рядом Люрота*, породженим послідовністю натуральних чисел (d_n) , називається вираз виду

$$\frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)} + \dots + \frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_n(d_n+1)(d_{n+1}+1)} + \dots$$

Очевидно, що залишок ряду $r_n \leq \frac{1}{2^n}$ і $r_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), а тому кожен ряд Люрота збіжний, причому сума ряду Люрота не перевищує 1. У роботі [1] система зображення чисел рядами Люрота: *для будь-якого числа* $x \in (0; 1]$ *існує послідовність натуральних чисел* $(d_n(x))$ *така, що*

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)} + \dots + \frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_n(d_n+1)(d_{n+1}+1)} + \dots \equiv \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L.$$

Розклад числа в ряд Люрота називається L -представленням числа, а скорочений запис $\Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L$ – його L -зображенням.

Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m d_1 d_2 \dots}^L, (d_n) \in N^\infty\}.$$

Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$ є проміжком $(a; a + \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1)})$, з чого слідує, що $|\Delta_{c_1 \dots c_m}^L| = i(i+1)|\Delta_{c_1 \dots c_m i}^L|$, $i \in N$. Остання рівність виражає основне метричне відношення довжин вкладених циліндрів послідовних рангів і вказує на N -самоподібність системи кодування чисел.

Основним об'єктом дослідження є функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L) = \Delta_{[k_1+d_1][k_2+d_2]\dots[k_n+d_n]\dots}^L, \quad k_n \in Z_+.$$

Теорема 1. *Функція f є зростаючою, причому якщо починаючи з деякого n усі $k_n = 0$, то f є кусково-лінійною функцією виду*

$$f(x) = \frac{1}{d'_1+1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{d'_1(d'_1+1)\dots(d'_i+1)} + \omega^{n-1}(x), \quad \text{де } d'_i = d_i + k_i,$$

$\omega^{n-1}(x = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L) = \Delta_{d_n d_{n+1} \dots}^L$ – оператор зсуву L -зображення чисел.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Luroth J. Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. — 1883. — 21. — P. 411-423.
- [2] Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основні метричної теорії// Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат науки. — Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 2008, № 9.— С.200-211.

УДУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: n.bilovytska@gmail.com

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ НЕСКІНЧЕННОСИМВОЛЬНОГО B -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ У ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

О.І. БОНДАРЕНКО, Н.М. ВАСИЛЕНКО

Означення 1. Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — послідовність додатних дійсних чисел ($n \in Z$) така, що

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1, \quad 0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1, \quad u + v = 1.$$

Прикладом такої є двостороння послідовність (Θ_n) : $\Theta_0 = \frac{1-3a}{1-a}$, $\Theta_{-n} = \Theta_n = a^n$, де параметр a задовольняє нерівності $0 < a < \frac{1}{3}$, $n \in N$, або $\Theta_{-n} = 2^{-(n+1)}$, $\Theta_0 = \frac{1}{3}$, $\Theta_n = 3^{-(n+1)}$, $n \in N$.

Сформуємо іншу двосторонню послідовність (b_n) , визначену послідовністю (Θ_n) , а саме

$$b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = b_{n-1} + \Theta_{n-1}.$$

Теорема 1. Для будь-якого числа $x \in (0; 1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^B(\emptyset), \quad (1)$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^B. \quad (2)$$

Числа, для яких виконується рівність (1), називаються B -скінченними, а ті, для яких виконується рівність (2), — B -нескінченними.

Множина всіх B -скінченних чисел є зліченною, причому всюди щільною в інтервалі $(0; 1)$ множиною.

B -зображення є засобом кодування чисел інтервала $(0; 1)$, їх ідентифікації та порівняння: числа $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^B$ і $y = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m}^B$ перебувають у

відношенні $x < y$ тоді і лише тоді, коли існує $k \in N$ таке, що $\alpha_k < \beta_k$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < k$.

Геометрію B -зображення чисел (геометричний зміст цифр, метричні відношення) достатньо повно розкривають властивості циліндричних і хвостових множин.

Означення 2. Множина $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B$ чисел $x \in (0; 1)$, що мають скінченне або нескінченне B -зображення з першими m -цифрами $c_1, c_2, \dots, c_m$ відповідно, тобто

$\Delta_{c_1 \dots c_m}^B = \{x : x = \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n(\emptyset)}^B, x = \Delta_{c_1 \dots c_m \beta_1 \beta_2 \dots}^B, (\beta_n) \in L\}$, називається B -циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$.

B -циліндри задають систему подрібнюючих розбиттів інтервала $(0; 1)$.

Означення 3. Кажуть, що B -зображення чисел $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^B$ і $y = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_n \dots}^B$ «мають однаковий хвіст» (символічно записують xy), якщо існують такі натуральні числа m і k , що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$. Вважатимемо, що B -скінченні числа мають однаковий хвіст за означенням.

Нехай $\gamma = \tau(a, b)$ — цілочисельна функція, означена на множині $D = Z \times Z$. Розглядаються дві функції:

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^B) = \Delta_{\tau(\alpha_1, \alpha_2), \tau(\alpha_3, \alpha_4), \dots, \tau(\alpha_n, \alpha_{n+1}), \dots}^B;$$

$$\varphi(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^B) = \Delta_{\tau(\alpha_1, \alpha_2), \tau(\alpha_2, \alpha_3), \dots, \tau(\alpha_{n-1}, \alpha_n), \tau(\alpha_n, \alpha_{n+1}), \dots}^B.$$

Якщо $\tau(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = \alpha_{k+1}$, то φ є оператором лівостороннього зсуву цифр B -зображення,

якщо $\tau(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = \alpha_k$, то φ є лінійною функцією $y = x$,

якщо $\tau(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = -\alpha_k$, то φ є інверсором цифр.

Якщо існує $u \in Z$ таке, що $\tau(a, b) \neq u$ при будь-яких a і b , то множина значень функцій f і φ мають фрактальну структуру.

Доповідь присвячена результатам досліджень властивостей функцій f та φ в залежності від властивостей функції τ , а також в порівняльному їх аналізі. Детально розглядаються випадки: $\tau(a, b) = |a|$, $\tau(a, b) = |a - b|$, $\tau(a, b) = a^2 + |b|$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Лисенко І.М., Ратушняк С.П. *Неперервні функції з локально скланими та фрактальними властивостями, пов'язані з нескінченносимвольним B -зображенням чисел* // Нелінійні коливання — 2023. — Т. 26, № 3.

УДУ ім. Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: o.i.bondarenko@udu.edu.ua

УДУ ім. Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: n.m.vasylenko@udu.edu.ua

**Про нові достатні умови довірчості систем циліндрів
 Q^* -зображення для обчислення розмірності
 Хаусдорфа-Безиковича**

В.О. ВАСИЛЕНКО, Г.М. ТОРБІН

Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів для множини E на W , якщо

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset W.$$

Нехай Q^* -стохастична матриця $Q^* = \|q_{ik}\|$, така, що

$$1) q_{ik} > 0 \quad (\forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \forall k \in N);$$

$$2) \sum_{i=0}^{s-1} q_{ik} = 1, \quad \forall k \in N;$$

$$3) \prod_{k=1}^{\infty} \max_i q_{ik} = 0.$$

Теорема 1. Нехай $Q_n := q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$, де $q_k := \max_i \{q_{ik}\}$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\alpha$ збігається $\forall \alpha > 0$, то сім'я $\Phi(Q^*)$ циліндрів, Q^* -зображення є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на відрізку $[0, 1]$.

Наслідок 1. Якщо $q := \sup_{ik} q_{ik} < 1$, то сімейство $\Phi(Q^*)$ циліндрів, породжених Q^* -розкладом дійсних чисел, є довірчим.

У доповіді представлено нові результати щодо довірчості сім'я $\Phi(Q^*)$ циліндрів для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. Ibragim, G. Torbin. *Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^* -digits*. // Modern Stochastics: 2016, vol. 3, №2, P. 119–131
- [2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. // Вид-во. НПУ, Київ, 1998.
- [3] S. Albeverio, G. Torbin. *Fractal properties of singular probability distributions with independent Q^* -digits*. // Bull. Sci.Math. — 2005. — Vol.129, no. 1. — P. 356–367.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: vasvlad1997@gmail.com

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: g.m.torbin@npu.edu.ua

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ДИВНИХ АТРАКТОРІВ: РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАСОБАМИ JAVASCRIPT

Є.О. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ

Динамічні системи з хаотичною поведінкою привертають увагу у дослідженнях через їх складність та важко передбачувані властивості. Одним із інструментів для аналізу хаотичних систем є візуалізація їх атракторів.

Метою роботи є створення програми візуалізації атракторів, яка має широкі можливості, є портативною, надійною та простою у використанні. У даній роботі представлено програму, розроблену з використанням мови програмування JavaScript, яка дозволяє візуалізувати різні типи атракторів та аналізувати їх хаотичні властивості. Зокрема, реалізовано побудову атрактора Лоренца, Росслера, Чень Лі та деякі інші.

Візуалізація атрактора відбувається шляхом побудови у тривимірному просторі траєкторії з послідовних значень, які набуває орбіта нелінійної динамічної системи в деякий момент часу, реалізована також побудова проєкцій орбіти на двовимірну площину [1]. Побудова проєкції орбіти, як на координаті площини, так і на довільну площину, виконується із застосуванням алгоритму обчислення послідовності точок проєкції орбіти

на площину $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f^*(x-x_c)}{z-z_c} \\ \frac{f^*(y-y_c)}{z-z_c} \end{pmatrix} * R + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$, де x, y, z — координати точки, x_c, y_c, z_c — координати орбіти, x', y' — координати проєкції точки на площину, f — фокусна відстань, R — матриця повороту, що відповідає куту, на який повернутий спостерігач, t_x, t_y — вектор зсуву.

Програма адаптована до різних пристроїв, має зручний інтерфейс та можливості для проведення досліджень різних динамічних систем. Функціонал програми може бути розширений додаванням нових можливостей, таких як збереження параметрів атракторів, візуалізація двох атракторів одночасно, збільшення варіантів атракторів для побудови.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Robert L. Devaney *A First Course in Chaotic Dynamical Systems Theory and Experiment // Second Edition*. — London: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2020. — 329 p.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: e.voytsekhovskiy@ukma.edu.ua

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ РОЗМІРНІСТЬ ХАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА

Ю.П. ВОЛОШИН

Доповідь присвячена властивостям перетворень, які зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Дослідження таких перетворень були започатковані в роботах М.В. Працьовитого, Г.М. Торбіна та їх учнів (див. [1, 2]).

Нагадаємо деякі означення (див., наприклад, [3, 4]).

Означення 1. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E називається число

$$\dim_H E = \inf \{ \alpha : H^\alpha(E) = 0 \},$$

де $H^\alpha(E) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \inf \sum_k |E_k|^\alpha \}$, де інфімум береться по всім можливим ε -покриттям множини E .

Нехай (M, ρ) — деякий метричний простір і $f : (M, \rho) \rightarrow (M, \rho)$.

Означення 2. Відображення f називається DP-перетворенням простору M , якщо

$$\forall E \subset M : \quad \dim_H(E) = \dim_H(f(E)).$$

Означення 3. Функція f називається бі-Ліпшицевим відображенням простору M , якщо існують $A, B > 0$, такі, що

$$A\rho(x_1; x_2) \leq \rho(f(x_1); f(x_2)) \leq B\rho(x_1; x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in M.$$

Теорема 1. Якщо f є бі-Ліпшицевим перетворенням множини деякого метричного простору (M, ρ) , то f є DP-перетворенням множини M .

Як добре відомо, будь-яке афінне перетворення f простору R^2 можна подати у вигляді композиції руху та двох стисків до двох перпендикулярних прямих. Звідси випливає теорема 2.

Теорема 2. Довільне афінне перетворення f простору R^2 є бі-Ліпшицевим перетворенням цього простору.

Наслідок 1. Будь-яке афінне перетворення простору R^2 є DP-перетворенням простору R^2 .

Оскільки довільне афінне перетворення R^3 є композицією руху та стисків до трьох попарно перпендикулярних площин, то маємо:

Теорема 3. Довільне афінне перетворення f простору R^3 є бі-Ліпшицевим перетворенням на R^3 , і, отже, є DP-перетворенням простору R^3 .

Вивчення DP-перетворень важливо з двох точок зору.

- (1) Якщо перетворення f переводить деяку множину E в множину E' , і при цьому зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, то достатньо знайти розмірність Хаусдорфа–Безиковича простішої з множин, щоб знайти розмірність обох множин.
- (2) з групової точки зору кожна геометрія вивчає інваріанти певної групи перетворень. Евклідова геометрія — інваріанти групи рухів. Афінна геометрія — інваріанти групи афінних перетворень. Проективна геометрія — інваріанти групи проективних перетворень. Топологія — інваріанти групи гомеоморфізмів. Не важко довести, що множина всіх DP-перетворень простору (M, ρ) є групою (не-абелевою) відносно операції «композиція» перетворень. Тому на фрактальну геометрію природно дивитись, як на науку, яка вивчає інваріанти групи DP-перетворень. Отже, евклідова та афінна геометрії є частковими випадками фрактальної геометрії.

Зауваження 1. Не кожне гомеоморфне перетворення зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича.

У доповіді також обговорюється DP-властивості проективних перетворень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Alberverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension* // Ergodic Theory Dynam. Systems — 2004. — Т. 24, № 7. — С. 1–16.
- [2] Alberverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension* // Central European Journal of Mathematics. — 2008. — Т. 6, № 1. — С. 15–24.
- [3] Turbin A.F., Pratsiovytyi M.V. *Fractal sets, functions and distributions*. — Київ: Наук. думка, 1992.
- [4] Falconer K.J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. — John Wiley and Sons, 2003.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: yu.p.voloshyn@udu.edu.ua

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ ЗАСОБАМИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Д.П. ГЕРАСИМЧУК

Існування детермінованого хаосу накладає обмеження на можливість моделювання складних процесів, наприклад, метеорологічних чи економічних, тому його дослідження та подальший розвиток напрямку залишається актуальним, оскільки може призвести до вирішення проблем зі моделюванням складної природи досліджуваного явища, об'єкта тощо.

У даній роботі проводиться дослідження властивостей динамічних систем та детермінованого хаосу у вигляді обчислювальних експериментів [1] засобами математичного та комп'ютерного моделювання, а також моделювання фрактальних структур множин Жюліа та Мандельброта.

Виконана програмна реалізація системи експериментів, які досліджують та характеризують динаміку квадратичної функції $Q_c(x) = x^2 + c$, де $-2 \leq c \leq 0.25$, $-2 \leq x \leq 2$, та логістичної функції $F_\lambda(x) = \lambda \cdot x \cdot (1 - x)$, де $0 \leq \lambda \leq 4$, $0 \leq x \leq 1$.

Наведемо деякі з реалізованих експериментів:

- (1) Побудова орбіт для різних x функцій $Q_c(x)$ та $F_\lambda(x)$, швидкість збіжності до фіксованих та n -періодичних точок.
- (2) Моделювання динамічної поведінки функцій $Q_c(x)$ та $F_\lambda(x)$ для різних значень параметру c та λ відповідно, побудова біфуркаційної діаграми на цьому проміжку.
- (3) Знаходження вікон періодів n на орбітній діаграмі $Q_c(x)$ та $F_\lambda(x)$ і визначення їхньої послідовності.
- (4) Ідентифікація ітерованих систем функцій, що породили певні фрактали як їх аттрактори.
- (5) Дослідження множин Жюліа та Мандельброта.

Детальніше розглянемо експеримент по знаходженню вікон періодів n на орбітній діаграмі функції $Q_c(x)$. Кожне вікно періоду n (period- n window) характеризується тим, що в ньому з'являється притягуючий цикл періоду n (attracting n -cycle), після якого відбувається явище подвоєння періоду подальших циклів (period-doubling bifurcation), з чого випливає, що послідовність періодів вікон можна отримати ітеративно. На першій ітерації виділяються два чи три 'найбільші' вікна, з Рис. 1 видно, що це 3, 5, 6 та 1 вікна. На другій ітерації розглядаються півінтервали $[3, 5)$, $[5, 6)$ та $[6, 1)$, в яких знаходяться нові вікна, як показано на Рис. 2. Подальші

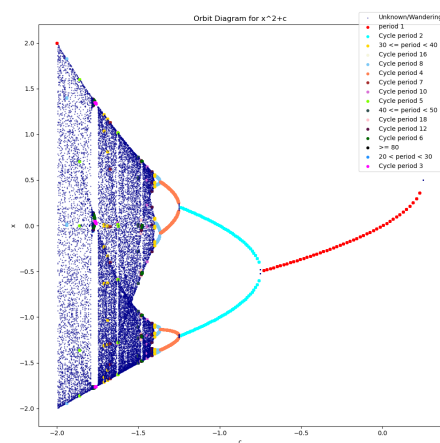


Рис. 1. Орбітна діаграма функції $Q_c(x)$ для $x_0 = 0$ при $-2 \leq c \leq 0.25$.

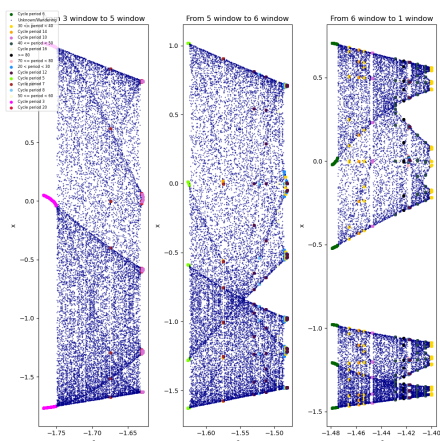


Рис. 2. Орбітна діаграма функції $Q_c(x)$ для $x_0 = 0$ при c на півінтервалах $[3, 5)$, $[5, 6)$ та $[6, 1)$.

ітерації проводяться для уточнення результату. В алгоритмі розглядається значення c для циклу періоду $n \cdot 2^k$ n -періодичного вікна, де $k \in \mathbb{N}$, оскільки це дозволяє відшукати невеликі вікна, які в іншому випадку можуть бути пропущені.

Дана система експериментів візуалізує явища, які виникають в динамічних системах різної природи та моделюють їхню хаотичну поведінку. Розроблене для реалізації експериментів програмне забезпечення може використовуватись при вивченні властивостей детермінованих та хаотичних динамічних систем.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Robert L. Devaney *A First Course in Chaotic Dynamical Systems Theory and Experiment Second Edition*. — London: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2020. — 329 p.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, Київ, Україна
Email address: dp.herasymchuk@ukma.edu.ua

ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ НЕГА- Q_s -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

В.О.ЄЛАГІН

Доповідь присвячена результатам дослідження хвостових множин для неґа- Q_s -зображення чисел, а також неперервних перетворень (автобієкцій) одиничного відрізка, які зберігають "хвости" неґа- Q_s -зображення чисел. Перетворенням множини називається бієктивне (одночасно ін'єктивне та сюр'єктивне) відображення цієї множини на себе. Неперервне перетворення відрізка $[0;1]$ є зростаючою або спадною неперервною функцією такою, що $f(0) = 0; f(1) = 1$ або $f(0) = 1; f(1) = 0$.

Нехай $Q_s \equiv (q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$ — заданий ймовірнісний (стохастичний) вектор з додатними координатами, тобто 1) $q_i > 0$, 2) $q_0 + q_1 + \dots + q_{s-1} = 1 = \beta_s; \beta_0 = 0, \beta_{i+1} = \beta_i + q_i = q_0 + q_1 + \dots + q_i, i = 0, 1, \dots, s-1$

Теорема 1. [2] Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_s$ така, що $x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j(x)} \equiv \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{Q_s}$

Останній скорочений запис $\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{Q_s}$ називається Q_s -зображенням числа x , при цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ відповідно n -ою цифрою цього зображення.

Зауваження 1. [1] Якщо цифри утворюють період у Q_s -зображенні числа, то вони записуються у круглих дужках. Зліченна множина чисел має два Q_s -зображення. Це числа виду: $\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k(0)}^{Q_s} = \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}(s-1)}^{Q_s}$. Домовимось використовувати лише одне з двох існуючих Q_s -зображень таких чисел, а саме: те, що містить період (0).

Кажуть, що неґа- Q_s -зображення чисел $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-Q_s}$ та $x_2 = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{-Q_s}$ мають однакові хвости, якщо існують натуральні числа m та n такі, що $\alpha_{n+j}(x_1) = \beta_{m+j}(x_2)$, для будь-якого $j \in \mathbb{N}$, символічно $x \sim y$.

Казатимемо, що функція $f(x)$ зберігає хвости неґа- Q_s -зображення чисел, якщо для будь-якого $x \in [0; 1]$ виконується $x \sim f(x)$.

Подамо ряд представлення у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 x &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \cdots + \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} + \cdots = (\beta_{\alpha_{1+1}} - q_{\alpha_1}) + \\
 &\beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + (\beta_{\alpha_{3+1}} - q_{\alpha_3}) q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} + \cdots + (\beta_{\alpha_{2k-1+1}} - q_{\alpha_{2k-1}}) \prod_{j=1}^{2k-2} q_{\alpha_j(x)} + \\
 &\beta_{\alpha_{2k}} \prod_{j=1}^{2k-1} q_{\alpha_j(x)} + \cdots = \beta_{\alpha_{1+1}} - \beta'_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_{3+1}} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \cdots + \beta_{\alpha_{2k-1+1}} \prod_{j=1}^{2k-2} q_{\alpha_j} - \\
 &\beta'_{\alpha_{2k}} \prod_{j=1}^{2k-1} q_{\alpha_j} + \cdots = \beta'_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} (\beta'_{\alpha_k}(x) \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-Q_s}, \text{ де} \\
 &\beta'_{\alpha_n} = \begin{cases} \beta_{\alpha_{n+1}}, & \text{якщо } n - \text{ непарне,} \\ 1 - \beta_{\alpha_n}, & \text{якщо } n - \text{ парне.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Таке представлення будемо називати нега- Q_s -представленням, а відповідний скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-Q_s}$ нега- Q_s -зображенням числа x .

Теорема 2. Множина G усіх неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають хвости нега- Q_s -зображення чисел, відносно операції композиція, утворює незліченну некомутативну групу з нескінченною підгрупою зростаючих перетворень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий, М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування — Київ: Наук. думка, 2022. — 316 с.
- [2] Працьовитий, М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів — Київ: Вид-во НПУ імені МП Драгоманова, 1998. — 296 с.

INSTITUTE MATHEMATICS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE,
KYIV, UKRAINE

Email address: yelahin@imath.kiev.ua

FRACTAL DIMENSION OF THE BOUNDARY OF CANTORVALS

D.M. KARVATSKYI

Let's consider a convergent positive series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. By $E(a_n)$ we denote the set of all subsums for the series $\sum a_n$, i.e.

$$E(a_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n : (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^N \right\}.$$

We study metric and fractal properties of the set

$$X(m) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2m+2} : (\varepsilon_n) \in \{0, 2, 3, \dots, 2m+1, 2m+3\}^N \right\},$$

which is the set of subsums for the series

$$3q + \underbrace{2q + \dots + 2q}_m + 3q^2 + \underbrace{2q^2 + \dots + 2q^2}_m + \dots + 3q^n + \underbrace{2q^n + \dots + 2q^n}_m + \dots$$

where $q = 1/(2m+2)$, $m \in N$.

Connectivity components of the closed bounded set $X(m) \subset R$ are either closed intervals or singletons. From now on, we denote *the interior* of the above set by $X_I(m)$, while $X_C(m) = X(m) \setminus X_I(m)$ will be called *the boundary* of $X(m)$. The following theorem demonstrates the structure of $X(m)$.

Theorem. *The set $X(m)$ can be obtained as the union $X = X_I(m) \cup X_C(m)$, where $X_I(m)$ is an infinity union of open intervals having the Lebesgue measure equal to 1, $X_C(m)$ is a Cantor set with zero Lebesgue measure and fractional Hausdorff dimension $\dim_H X_C = \log_{2m+2} 3$.*

We say that a Cantorval X is *achievable* if there exists a convergent positive series $\sum u_n$ such that $X = E(u_n)$. Taking into account the above theorem, there naturally arises the question: Is the boundary X_C for an arbitrary Cantorval X a fractal set?

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: karvatsky@imath.kiev.ua

ПРО ТИП РОЗПОДІЛУ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ПРОДУКОВАНИХ ОПЕРАТОРОМ ГАУССА СИМВОЛІВ ЛАНЦЮГОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ

Р.В. КРИВОШИЯ, Д.Ю. СКАКУН

Нехай $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ класичне ланцюгове зображення числа $x \in (0; 1)$. Позначимо $\eta(\cdot)$ міру Лебега-Стільтєса, що відповідає функції розподілу $f(t) = \log_2(1 + t)$, де $t \in [0; 1]$. Нехай $T(x) = \{\frac{1}{x}\}$ — оператор Гаусса.

Добре відомо [1, 3], що для динамічної системи $([0; 1]; B([0; 1]); \eta(\cdot); T)$ міра $\eta(\cdot)$ є інваріантною та ергодичною відносно оператору T .

Теорема 1. *Для майже всіх чисел $t \in (0; 1)$ послідовність $(T^n(t))$ розподілена за функцією $f(x)$, тобто для кожного відрізка $[a; b] \subseteq [0; 1]$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k(t; [a; b])}{k} = f(b) - f(a),$$

де $N_k(t; [a; b])$ — кількість чисел серед $T(t), T^2(t), \dots, T^k(t)$, що належать $[a; b]$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Levy P. *Sur les lois de probabilité dont dependent les quotients complets et incomplets dune fraction continue*. Bull. Soc. Math. France. — 1929. — 57. P. 178-194.
- [2] Pratsiovytyi M., Chuikov A. *Continuous distributions whose functions preserve tails of a A-continued fraction representation of numbers*. Random Operators and Stochastic Equations. — 2019. — 27(3). P. 199-206.
- [3] Wirsing E. *On the theorem of Gauss-Kuzmin-Levy and a Frobeniustype theorem for function spaces*. Acta Arithmetica. — 1974. — 24. P. 506-528.

Кропивницький будівельний фаховий коледж, Кропивницький, Україна
Email address: mostik19@gmail.com

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: skakund2020@gmail.com

АСИМПТОТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДУЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ

О.П. МАКАРЧУК

Для характеристичної функції $f_\tau(t)$ випадкової величини τ розглянемо значення $L_\tau = \overline{\lim}_{|t| \rightarrow +\infty} |f_\tau(t)|$. Добре відомо [1], що для довільного дискретного розподілу τ : $L_\tau = 1$. Якщо розподіл τ абсолютно неперервний, то $L_\tau = 0$. Для сингулярного розподілу τ , як відомо [2], $L_\tau \in [0; 1]$.

Нехай $\eta \in (1; +\infty)$, m — натуральне числа більше за 1, (ψ_k) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, m-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(m-1)k}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \eta^{-k}.$$

В [3] були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для випадку $\eta \in N$.

Теорема 1. *Якщо послідовність $(\max(p_{0n}; \dots; p_{(m-1)n}))$ віддільна від нуля та η — ірраціональне число Пізо, то рівність $L_\psi = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли для кожного $t \in Q(\eta)$ виконується умова*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_\psi(2\pi t \lambda^n)| = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Bohr H. *Fastperiodische Funktionen*. — Berlin: J.Springer, 1932. — P. 96.
- [2] Schvartz L. *Sur le module de la fonction caracteristique du calcul des probabilités* // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1941. — **212**. — P. 418 – 421.
- [3] Макарьчук О. П. *Асимптотична поведінка перетворення Фур'є-Стілт'єса розподілу одного випадкового степеневого ряду* // Нелінійні коливання. — 2023. — **26**, №4. — С. 495 – 504 (2023).

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: makolpet@gmail.com

МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ

Д.О. МИРОШНІЧЕНКО

Аналітична геометрія робить вагомий внесок в розв'язок типових задач механіки та фізики. Так, наприклад, диференціальна геометрія є потужним інструментом у моделюванні фізичних процесів: вона широко застосовується для обчислення траєкторій руху частинок чи матеріальних точок.

Одним з основних елементів диференціальної геометрії є крива. Криву на поверхні характеризують дві компоненти її кривини – нормальна та геодезична.

Означення 1. Криву називають геодезичною лінією, якщо геодезична кривина кривої перетворюється в нуль у кожній її точці.

Теорема 1. *Через будь-яку точку на регулярній поверхні у будь-якому напрямі можна провести геодезичну лінію, при тому лише одну.*

Зауваження 1. Механічна інтерпретація цього явища диференціальної геометрії полягає у тому, що геодезична лінія сполучає дві точки на поверхні за найкоротшою відстанню і, спираючись на Теорему 1, є єдиною для конкретної точки, тож часто виступає як траєкторія руху.

Приклад 1. *Розглянемо рух частинки з масою m та зарядом q в електромагнітному полі. Закон її руху задає рівняння:*

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r * \left(\frac{dr}{dt} \right)) \frac{1}{\rho^3},$$

де k — константа, r — радіус-вектор частинки, $\rho = r$ — полярна вісь.

Зауваження 2. З рівняння можна отримати, що рух частинки відбувається на круговому конусі, з кутом при вершині $2(\pi - \varphi)$. Траєкторія є геодезичною лінією конуса. В залежності від кута при вершині, визначається наявність самоперетину геодезичної лінії (кут $\leq 60^\circ$ гарантує його наявність). Узагальнюючи, частинка в електромагнітному полі рухається за геодезичною лінією, що є найвигіднішою для неї траєкторією.

Приклад 2. *Доведено, що рух матеріальної точки в полі дії сил тяжіння відбувається за конічним перерізом (по еліпсу, параболі або гіперболі) та, аналогічно до Прикладу 1, траєкторія в полі дії сил тяжіння*

відповідає полярному рівнянню конічного перерізу з фокусом в полюсі:

$$\frac{1}{\rho} = C_3 + \sqrt{C_3} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

де φ , C_3 — певні константи.

Зауваження 3. Для тіла, що рухається під дією сил тяжіння, аналогічно, найвигіднішою траєкторією є геодезична лінія. Тож для визначення руху балістичного снаряду необхідно спиратися на Приклад 2.

Геодезичні лінії можуть підкріпити аналітичні рівняння траєкторій руху балістичних снарядів, коли узагальнена модель руху виводиться емпірично.

Твердження 1. При розгортці поверхні геодезична лінія перетворюється у пряму.

Зауваження 4. Необхідно зазначити, що характеристика поля сил, в яке попадають піддослідні моделі, ідентичні — вони обидва є центральними полями сил. Звідси, можна зробити висновок, що траєкторії руху є плоска крива, яка спираючись на Твердження 1, перетвориться в пряму при розгортці поверхні. Це, в свою чергу, може підтвердити, що траєкторія є геодезичною лінією.

Наведені приклади та обґрунтування вказують на одну з найбільш практичних властивостей геодезичних ліній — вона є траєкторією руху матеріальної точки по гладкій поверхні.

Загалом, геодезичні лінії можуть бути потужним оператором для обчислення траєкторій. Вони можуть пояснити природу руху космічних тіл, поведінку заряджених частинок під дією поля електромагнітних сил або допомогти задати рівняння руху балістичних снарядів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Борисенко О. А. *Диференціальна геометрія і топологія*. — Харків: Основа, 1995. — 304с.
- [2] С.Ф. Пилипака, О.С. Породько, І.Р. Костенко. *Форма геодезичної лінії конуса в залежності від кута при його вершині* // Збірник тез доповідей ХУ Міжнародної науково-практичної конференції “Обухівські читання”.
- [3] Погорелов А.В. *Лекції з диференціальної геометрії*. — Харків: Видавництво Харківського державного університету, 1967. — 165 с.
- [4] Стеганцева П.Г., Стеганцев Є.В., Гречнева М.О. *Диференціальна геометрія і топологія: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика»* — Запоріжжя: ЗНУ, 2019. — 160 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: d.myroshnichenko.al31@kpi.ua

ДИСКРЕТНІ РОЗПОДІЛИ НЕСКІНЧЕННИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ З ЩІЛЬНИМ В ДЕЯКІЙ КОНТИНУАЛЬНІЙ МНОЖИНІ СПЕКТРОМ

М.Г. МОСКАЛЬКО

Нагадаємо, що розподіл випадкової величини ξ називають *дискретним*, якщо він зосереджений на скінченній або зліченній множині, тобто випадкова величина ξ набуває не більш ніж зліченну множину значень.

Множина атомів дискретного розподілу, тобто точок x_i , таких що $P\{\xi = x_i\} > 0$ називається *точковим* або *дискретним* спектром випадкової величини ξ і позначається D_ξ .

Дискретні розподіли, які фігурують в навчальній літературі в переважній більшості мають або скінченні спектри, або спектри, переважна більшість точок яких є ізольованими.

В науковій літературі дискретним розподілам з всюди щільним у деякому відрізку спектром приділено небагато уваги. Прикладом такого є розподіл, зосереджений на множині раціональних чисел відрізка $[0, 1]$.

Нехай $A = \{0, 1\}$ – алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний додатний ряд з сумою r_0 , а (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно ($p_{in} > 0$, $p_{0n} + p_{1n} = 1$), то розподіл суми ξ випадкового ряду

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$$

називають *нескінченною згортокою Бернуллі*, керованою даним рядом $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \equiv r_0$. Зрозуміло, що розподіл випадкової величини ξ зосереджений на відрізку $[0; r_0]$.

Згідно з відомою теоремою Джессена-Вінтнера розподіл випадкової величини ξ має *чистий лебегівський тип*, тобто належить до одного з трьох існуючих типів: дискретного, абсолютно неперервного або сингулярного. Причому він буде чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0.$$

В залежності від ряду (властивостей ряду) точковий спектр розподілу ξ може мати різні топологічні властивості. В переважній більшості “продиктовані” властивостями множини неповних сум (підсум) ряду, а саме

$E = \{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, (\varepsilon_n) \in L\}$. Якщо у матриці $\|p_{in}\|$ нулів немає, то очевидно, що $D_\xi = E(a_n)$. Якщо існують нулі, то $E(a_n) \neq D_\xi \subset E(a_n)$.

Оскільки за своїми властивостями множина E може бути 1) або відрізком; 2) або скінченним об'єднанням відрізків; 3) або ніде не щільною множиною (додатної або нульової міри Лебега); 4) або бути канторвалом, то дискретні розподіли нескінченної згортки Бернуллі можна за цим принципом класифікувати.

Приклад 1. Нехай $a_n = \frac{2}{3^n}$. Тоді множина неповних сум даного ряду є класичною множиною Кантора C і при $p_{in} > 0 \forall i \in A$ та $\forall n \in N$ D_ξ є щільною в C . В цьому випадку ми кажемо, що дискретний розподіл має канторівський тип.

Якщо E – відрізок або скінченне об'єднання відрізків, а D_ξ щільна в E , то кажемо, що ξ має дискретний розподіл салемівського типу.

Якщо D_ξ щільна в E , а E є канторвалом, то казатимемо, що розподіл ξ канторвального типу. Наведемо приклад канторвального типу. Нехай

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_{2n-1} = \frac{3}{4^n}, a_{2n} = \frac{2}{4^n}.$$

Даний ряд у науковій літературі називають рядом Гатрі-Німана. Він є арифметичною сумою двох геометричних рядів і має множину підсум канторвал – специфічне об'єднання нескінченної кількості проміжків та ніде не щільної множини.

Нагадаємо, що характеристична функція розподілу випадкової величини ξ називається комплекснозначна функція $f_\xi(t)$, що є вираженням математичного сподівання випадкової величини $e^{it\xi}$, тобто $f_\xi(t) = Me^{it\xi}$.

Оскільки (ξ_k) – послідовність незалежних випадкових величин, то

$$\begin{aligned} f_\xi(t) &= Me^{it \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n} = \prod_{n=1}^{\infty} Me^{ita_n \xi_n} = \prod_{n=1}^{\infty} (p_{0n} e^{ita_n \cdot 0} + p_{1n} e^{ita_n \cdot 1}) = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (p_{0n} + \cos(ta_n) + i \sin(ta_n)). \end{aligned}$$

Числова характеристика $L_\xi \equiv \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_\xi(t)|$ є важливою у питанні лебегівської структури (типу) розподілу. Для дискретних розподілів $L_\xi = 1$. Цікаво по якій траєкторії це значення досягається?

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Турбін А.Ф., Працьовитий М.В. Фрактальні множини, функції, розподіли. — Київ: Наук. думка, 1992. — 208 с.
- [2] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сигулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

УДУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
Email address: 23fmif.m.moskalko@std.udu.edu.ua

ОДИН КОНТИНУАЛЬНИЙ КЛАС ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ОЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ Q_3 -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

В.В. НАЗАРЧУК, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s -символьної системи кодування чисел, $L_s \equiv A_s \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $c = \Delta_{c_1 \dots c_n}^2 = \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_n}{2^n} + \dots$, $c_n \in L_2$ — класичне двійкове зображення числа $c \in [0; 1]$.

Нехай задано набір додатних чисел q_0, q_1, q_2 : $q_i \in (0; 1)$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$. Відомо [1], що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_3$ така, що

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3},$$

де $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv q_0$, $\delta_2 = q_0 + q_1$, тобто $\delta_{\alpha_n} = \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} q_i$.

Розклад числа в такий ряд називається Q_3 -представленням числа x , скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}$ — його Q_3 -зображенням.

Існують числа, що мають два Q_3 -зображення:

$$\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n-1] (0)}^{Q_3} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n (2)}^{Q_3}.$$

Такі числа називаються Q_3 -бінарними. Решта чисел мають єдине зображення і називаються Q_3 -унарними.

Геометрію Q_3 -зображення розкривають властивості *циліндрів*:

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} = \{[0; 1] \ni x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \alpha_1 \alpha_2 \dots}^{Q_3}, (\alpha_n) \in L_3\}.$$

Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}$ є відрізком

$$\left[\sum_{i=1}^m (\delta_{c_i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{c_j}); \sum_{i=1}^m (\delta_{c_i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{c_j}) + \prod_{i=1}^m q_{c_i} \right],$$

звідки слідує, що $|\Delta_{c_1 \dots c_m c}^{Q_3}| = q_c |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3}|$, $c \in A_3$. Остання рівність називається *основним метричним відношенням*. Оскільки воно не залежить від довжини основи $c_1 \dots c_m$, а залежить лише від останньої цифри, то кажуть що дане зображення є *самоподібним*.

Зазначимо, що коли $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, то Q_3 -зображення збігається з класичним трійковим зображенням, тобто є його узагальненням.

Основним об'єктом розгляду є континуальний клас F функцій f_c , $c \in [0; 1]$. Функція f_c означається на $[0; 1]$ рівністю:

$$f_c(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{|2c_1 - \alpha_1| |2c_2 - \alpha_2| \dots |2c_n - \alpha_n| \dots}^{Q_3}, \quad (1)$$

(c_n) – цифри двійкового зображення числа $c = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^2$.

Найпростішими представниками класу F є такі функції:

$$f_1(x) = f_c(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{[2 - \alpha_1][2 - \alpha_2][2 - \alpha_3] \dots [2 - \alpha_n] \dots}^{Q_3}, c = \Delta_{(1)}^2 \quad (2)$$

$$f_2(x) = f_c(x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}^{Q_3}) = \Delta_{[2 - \alpha_1] \alpha_2 \dots [2 - \alpha_{2k-1}] \alpha_{2k} \dots}^{Q_3}, c = \Delta_{(10)}^2. \quad (3)$$

До цього класу F і функція $f_0(x) = x$, коли $c = 0$. Для більшості функцій класу F коректність їх означень вимагає домовленості використовувати лише одне з двох зображень Q_3 -бінарних чисел, а саме те, що містить (0). Зауважимо, що кожна з функцій класу F зберігає цифру 1 у Q_3 -зображенні чисел. Функція (2) називається інверсором Q_3 -зображення. Вона є неперервною строго спадною і сингулярною, коли існує $q_i \neq \frac{1}{3}$.

Теорема 1. Множина всіх функцій $(F; \circ)$ разом з операцією композиція (суперпозиція) утворює комутативну групу, нейтральним елементом якої є функція f_c , де $c = 0$, а оберненим до f_c є функція сама функція f_c .

Зауваження 1. Зауважимо, що для довільного $c \in [0; 1]$ має місце рівність

$$f_c \circ f_{I(c)}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{[2 - \alpha_1][2 - \alpha_2] \dots [2 - \alpha_n] \dots}^{Q_3},$$

де I – інверсор двійкового зображення чисел, тобто

$$I(c = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^2) = \Delta_{[1 - \alpha_1][1 - \alpha_2] \dots [1 - \alpha_n] \dots}^2 = 1 - x.$$

Теорема 2. Функції f класу F є неперервними на множині Q_3 -унарних чисел, а на множині Q_3 -бінарних чисел неперервними є лише $y = x$ і $y = f_1(x)$. Якщо існує такий номер n , починаючи з якого $c_{n+1} = i$, $n \in N$, то функція f є неперервною на кожному циліндрі $n+1$ -го рангу, причому сингулярною, якщо $i = 1$, $q_0 \neq q_2$ і лінійною в решті випадків.

У доповіді будуть представлені результати дослідження структурних, тополого-метричних, фрактальних та диференціальних властивостей функцій класу F в залежності від значень параметрів c_n .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: nazarchukvalentya@imath.kiev.ua

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА
Email address: prats4444@gmail.com

ОДИН КОНТИНУАЛЬНИЙ КЛАС ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ОЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ ЛАНЦЮГОВОГО A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

О.О. НІКОРАК, С.П. РАТУШНЯК

Нехай $A_2 = \{e_0; e_1\}$ — алфавіт ($0 < e_0 < e_1, e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$), $L_2 = A_2 \times A_2 \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту.

Ланцюговим A_2 -дробом (A_2 -дробом) називається нескінченний ланцюговий дріб виду

$$1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \dots \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad a_n \in A_2.$$

Відомо, що [1] для будь-якого $x \in [\frac{1}{2e_1}; \frac{1}{2e_0}]$ існує послідовність $(a_n) \in L_2$, така що

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}.$$

Скорочений запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$ називається *ланцюговим A_2 -зображенням* числа x , $a_n = a_n(x)$ — його n -ою цифрою.

Існують числа, що мають два A_2 -зображення:

$$\Delta_{a_1 \dots a_{n-1} e_0 (e_0 e_1)}^{A_2} = \Delta_{a_1 \dots a_{n-1} e_1 (e_1 e_0)}^{A_2}.$$

Вони називаються *A_2 -бінарними*. Очевидно, що множина таких чисел є зліченною. Решта чисел відрізка $[\frac{1}{2e_1}; \frac{1}{2e_0}]$ мають єдине A_2 -зображення (вони називаються *A_2 -унарними*).

Означення 1. *Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$* називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$ така, що $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots}^{A_2}, (a_n) \in L_2\}$.

Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ є відрізком з кінцями $\Delta_{c_1 \dots c_m (e_0 e_1)}^{A_2}$ і $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m (e_1 e_0)}^{A_2}$ (де лівий, а де правий кінець, залежить від парності і непарності числа m).

Довжина циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ при $e_0 = \frac{1}{2}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)},$$

де q_m — знаменник підхідного дробу m -го порядку, що є значенням скінченного ланцюгового дробу $[0; a_1, \dots, a_m]$.

З останньої формули слідує вираз *основного метричного відношення*

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}|} = \frac{1 + c^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}}{2c^2 + 1 + 2c^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}}, \quad c \in A_2.$$

Основним об'єктом дослідження є функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}) = \Delta_{\frac{1}{2a_1} \frac{1}{2a_2} \dots \frac{1}{2a_n} \dots}^{A_2}. \quad (1)$$

Оскільки умова $e_0 e_1 = \frac{1}{2}$ є необхідною і достатньою для того, щоб система зображення чисел нескінченними ланцюговими A_2 -дробами мала нульову надлишковість (лише зліченна множина чисел мала два зображення), то при виконанні цієї умови маємо $\frac{1}{2e_i} = e_{1-i}$, $i \in \{0, 1\}$.

Функція f , означена рівністю (1) є коректно означеною на множині A_2 -бінарних чисел, оскільки

$$f(\Delta_{a_1 \dots a_n e_0 (e_0 e_1)}^{A_2}) = \Delta_{\frac{1}{2a_1} \dots \frac{1}{2a_n} e_1 (e_1 e_0)}^{A_2} = \Delta_{\frac{1}{2a_1} \dots \frac{1}{2a_n} e_0 (e_0 e_1)}^{A_2} = f(\Delta_{a_1 \dots a_n e_1 (e_1 e_0)}^{A_2}).$$

Зазначимо, що оскільки e_0 – довільне число з $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$, то рівність (1) задає континуальну сім'ю функцій f .

Функція f циліндр m -го переводить в циліндр того ж рангу, причому

$$f\left(\frac{1}{2e_1} = \Delta_{(e_1 e_0)}^{A_2}\right) = \frac{1}{2e_0}, \quad f\left(\frac{1}{2e_0} = \Delta_{(e_0 e_1)}^{A_2}\right) = \frac{1}{2e_1}.$$

Теорема 1. *Функція f є неперервною строго спадною на всій області визначення і має складну тополого-метричну локальну структуру.*

Кажуть, що функція є фрактальною, коли хоча б одна суттєва для неї множина (диференціального, варіаційного, метричного тощо характеру) має структурну або метричну фрактальність [2]. Наступна теорема розкриває зміст фрактальності функції f , означених рівністю (1).

Теорема 2. *Графік Γ_f функції f є автомодельною множиною R^2 зі структурою автомодельності $\Gamma_f = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_i є образом Γ при перетворенні*

$$\gamma_i : \begin{cases} x' = \delta_{e_i}(x) = \frac{1}{e_i + x}, \\ y' = \delta_{\frac{1}{2e_i}}(y) = \frac{2}{e_i + 2y}, \end{cases} \quad i \in \{0, 1\},$$

де $\delta_{e_i}(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}) = \Delta_{e_i a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$ – оператор правостороннього зсуву цифр зображення з параметром e_i , $e_i \in A_2$.

У доповіді пропонуються результати застосування ланцюгових зображень чисел до задання та дослідження інших функцій зі складними структурними властивостями.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V. A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — Р. 541-555.
- [2] Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

УДУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 19fmf.o.nikorak@std.npu.edu.ua

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: ratush404@gmail.com

МНОЖИНА ЗНАЧЕНЬ ОДНІЄЇ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОЇ ФУНКЦІЇ

В.Г. ПАРИПСА, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ – алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Тоді для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність елементів алфавіту (α_n) така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{8^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8.$$

Розклад числа x у вісімковий ряд називається вісімковим представленням числа, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8$ – його вісімковим зображенням. Існують числа, що мають два вісімкових зображення (вісімково-раціональні). Це числа виду $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n (0)}^8 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1] (8)}^8$. Решта чисел мають єдине зображення (вісімково-ірраціональні.)

Продуктивним поняття в геометрії чисел є оператори правостороннього і лівостороннього зсувів. Нагадаємо їх зміст.

Оператором лівостороннього зсуву цифр вісімкового зображення чисел називається функція $\omega(x)$, означена рівністю

$$\omega(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^8 = 8x - \alpha_1(x).$$

Оператором правостороннього зсуву вісімкового зображення чисел з параметром $i \in A_8$ називається функція $\delta_i(x)$:

$$\delta_i(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8 = (x + i)8^{-1}.$$

Нехай задано послідовність чисел $(r_n)_{n=0}^{\infty}$, таку що

$$r_n = \tau r_{n-1}, \quad n \in N, \quad \tau = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}(2-\sqrt{2-\sqrt{2}})}{\sqrt{2}+2}, \quad r_0 > 0.$$

Основним об'єктом дослідження є комплекснозначна функція

$$z(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8) = \sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-1} - r_n) \varepsilon_{\alpha_i}, \quad \text{де } \varepsilon_i = \sqrt[8]{1}, \quad i \in A_8.$$

Теорема 1. *Множина значень функції z є самоподібним фракталом.*

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, топологічних та фрактальних властивосте функції z .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Турбін А.Ф. Фрактальні множини, функції, розподіли. — Київ: Наук. думка, 1992. — 208 с.

УДУ імені М.П. Драгоманова, Інститут математики, Київ, Україна
Email address: parypasvova@gmail.com, prats4444@gmail.com

ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ З ДВОМА ЗМІННИМИ

В.І. ПЛАКИДА, І.М. ЛИСЕНКО

Розглядається функція $z = f(x, y)$, де $x \in [0; 1]$, $y \in (0; 1)$,

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2,$$

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = y, q_0 = y, q_1 = 1 - y,$$

$$z = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}.$$

Як бачимо, двійкове зображення аргумента x породжене послідовністю (α_n) нулів та одиниць, які визначають число z через послідовність (α_n) і Q_2 -зображення чисел з параметром y .

Незважаючи на те, що зліченна множина чисел має два різних зображення, те ж саме стосується і Q_2 -зображення, функція $f(x, y)$ є коректно означеною.

Функція z є неперервною при кожному фіксованому значенні y , причому сингулярною при $y \neq \frac{1}{2}$. Вона опукла вниз при $y < \frac{1}{2}$ і вгору при $y > \frac{1}{2}$, має самоафінний графік і є розв'язком системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(\frac{t}{2}) = y\varphi(t), \\ \varphi(\frac{1+t}{2}) = y + (1-y)\varphi(t). \end{cases}$$

Доповідь присвячена результатам дослідження властивостей функцій $f(x, y)$ при фіксованому x .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316с.
- [2] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сигулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: plakyda1@gmail.com

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: i.m.lysenko@npu.edu.ua

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ

І.І. ПРОДАН

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт, q_0 — фіксований число ($q_0 \in (0; 1)$), $q_1 \equiv 1 - q_0$. Відомо [2], що для $\forall x \in [0; 1]$ існує послідовність (α_n) , $\alpha_n \in A$, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2},$$

де $\beta_{\alpha_k} = \alpha_k q_{1-\alpha_k}$, $k \in N$. Вираз $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$ називається Q_2 -зображенням числа x . Існують числа (Q_2 -бінарні числа), що мають два зображення: $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 0(1)}^{Q_2} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 1(0)}^{Q_2}$. Множина Q_2 -бінарних чисел є зліченною. Решта чисел відрізка $[0; 1]$ мають єдине зображення (Q_2 -унарні). Далі розглядаються лише ті Q_2 -зображення чисел, які містять нескінченну кількість одиниць. Згідно з цією домовленістю кожне Q_2 -бінарне число має єдине зображення. Здійснивши перекодування Q_2 -зображення чисел за правилом $\Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{a_1-1} \underbrace{1 \underbrace{0\dots 0}_{a_2-1} 1 \dots 1 \underbrace{0\dots 0}_{a_n-1} 1 \dots}}^{Q_2} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}$, $a_n \in N$, отримає-

мо нескінченно-символьне q_0^∞ -зображення чисел інтервалу $(0; 1]$ [2].

Об'єктом дослідження є функція f , означена рівністю:

$$f(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^{q_0^\infty}, \text{ де } b_n = n + |a_n - a_{n+1}| \forall n \in N.$$

Функція f є неперервною на множині Q_2 -унарних чисел і розривною в усіх Q_2 -бінарних точках.

Теорема 1. *Множина значень функції f збігається з континуальною ніде не щільною множиною нульової міри Лебега*

$$C[q_0^\infty; V_n] = \{x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}, a_n \in V_n \equiv \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in N\}.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних та фрактальних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.
- [2] Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞ -зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел // Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 2013, № 15.— С. 100–118.

УДУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: samsungbrain2016@gmail.com

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНВЕРСОРА ЦИФР МАРКОВСЬКОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Д.М. СЕРГІЙКО

Нехай $A \equiv \{0, 1, 2\}$ – алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ – простір послідовностей, q_0, q_1, q_2 – набір додатних дійсних чисел: $\sum_{i=0}^2 q_i = 1$, $\|q_{ij}\|_{3 \times 3}$ – матриця: $q_{i0} + q_{i1} + q_{i2} = 1 \ \forall i \in A$, $q_{ij} > 0$. Тоді $\forall x \in [0; 1] \exists (\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots},$$

де $\beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \equiv q_{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\alpha_{k+1}-1} q_{\alpha_k i}$, $\beta_{\alpha_1} \equiv \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i$. Розклад числа x в ряд називається *марковським представленням*, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$ – *марковським зображенням* цього числа. Якщо $q_i = q_{ij} \ \forall i, j \in A$, то марковське зображення збігається з Q_3 -зображенням, якщо ж $q_i = q_{ij} = \frac{1}{3} \ \forall i, j \in A$, то збігається з класичним трійковим зображенням.

Основним об'єктом розгляду є функція I , означена на $[0; 1]$ рівністю

$$I(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2] \dots [2-\alpha_n] \dots}.$$

Означення функції I є коректним на множині чисел, що мають два формально різних зображення: $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (0)} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_n - 1] (2)}$. Функція I є неперервною і строго спадною на відрізьку $[0; 1]$, причому $I(a) = 1 - a$, $a = \{0, 1\}$. Функція I зберігає цифру 1 у марковському зображенні числа.

Теорема 1. *Якщо для елементів матриці $\|q_{ij}\|$ виконуються рівності $q_{ii} = q_i$, $q_i \in A$, що рівносильно тому, що $q_{ij} + q_{ik} = q_j + q_k$, $i, j, k \in A$ то $\Gamma_{ii} \sim \Gamma_i$, де $\Gamma_i = \{(x = \Delta_{i \alpha_1 \dots}; y = \Delta_{[2-i][2-\alpha_1] \dots}) \in R^2 : y = I(x)\}$.*

У доповіді пропонують результати дослідження структурних, фрактальних та диференціальних властивостей функції I .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Луцак В. В. Циліндричне марковське зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом та його застосування. – Київ: Наук. часоп. НПУ ім. М. П. Драгоманова, Серія 1: Фіз-мат науки, №15, 2013. – с. 188-194.
- [2] Працьовитий О. М. Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, №3, 2008. – с.57-67..

УДУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.d.serhiiko@std.npu.edu.ua

ГЕОМЕТРІЯ ЧИСЕЛ І СИСТЕМИ КОДУВАННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ З НЕНУЛЬОВОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ

Ю.О. СИМОНЕНКО

Нехай $A_s = \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$ – алфавіт, $L_s = A_s \times A_s \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Тоді $\forall x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s$ така, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$.

Розклад числа в s -ковий ряд називається s -ковим представленням, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ – s -ковим зображенням числа.

Розглядається множина $C[s; V_n] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s, \alpha_n \in V_n \subset A_s\}$.

Відомо, що за своїми топологічними властивостями ця множина може бути відрізком або об'єднаннями відрізків, множиною канторівського типу (досконалою ніде не щільною) або зліченим об'єднанням чисел. В загальній постановці задача про встановлення топологічного типу, міри Лебега цієї множини вивчена [1]. Суттєво складнішою є аналогічна задача, якщо x означений в термінах s -кового зображення чисел з ненульовою надлишковістю. Нагадаємо його зміст для одного спеціального випадку.

Нехай $A' = A_s \oplus A_s$, $L' = A' \times A' \times \dots$. Тоді $\forall x \in [0; 2]$ існує послідовність $(a_n) \in L'$ така, що має місце розклад $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s^n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$.

Зазначимо в такій системі зображення існують числа, що мають континуальну кількість різних зображень. Далі ми зосереджуємо свою увагу на системі зображення чисел з надлишковим алфавітом у випадку $s = 3$.

Теорема 1. Якщо $V_n = \{0, 1, 3, 4\}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то множина C співпадатиме з множиною неповних сум ряду $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{3}{3^n})$, яка задовольняє необхідну умову канторвальності множини.

Теорема 2. Якщо $V_n = \{0, 4\}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то множина C буде досконалою ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.

УДУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
Email address: yu.o.simonenko@npu.edu.ua

α -ЗОБРАЖЕННЯ ЛЮРОТА ТА МНОЖИНИ ЧИСЕЛ, ЗАДАНІ ОБМЕЖЕННЯМИ НА СИМВОЛИ ЦЬОГО ЗОБРАЖЕННЯ

К.Ю. СОКОЛОВА

Нехай $\alpha := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — зліченне розбиття одиничного інтервалу $\mathcal{U}$, яке складається з непорожніх відкритих справа і закритих зліва інтервалів. Передбачається, що елементи α впорядковані справа наліво, починаючи з A_1 . І нехай a_n — міра Лебега $\lambda(A_n)$, $A_n \in \alpha$ та $t_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ — міра Лебега n -го залишку α . Зрозуміло, що $t_1 := \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ для кожного розбиття α . Також корисно мати на увазі, що $t_{n+1} = t_n - a_n$.

Означення 1. Для даного розбиття α , визначимо відображення $L_\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ таке, що:

$$L_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{(t_n - x)}{a_n}, & x \in A_n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Відображення L_α називається відображенням α -Люрота [1].

Означення 2. Для кожного розбиття α відображення L_α призводить до розкладання чисел в ряд на $\mathcal{U}$, який має назву розклад α -Люрота.

Позначимо скінченний розклад α -Люрота через $[l_1, l_2, \dots, l_k]_\alpha$, для деякого $k \in \mathbb{N}$, і нескінченний — через $[l_1, l_2, l_3, \dots]_\alpha$. Розклад α -Люрота визначатимемо наступним чином [2] :

$$\begin{aligned} x = t_{l_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\prod_{i < n} a_{l_i} \right) t_{l_n} &= t_{l_1} - a_{l_1} t_{l_2} + a_{l_1} a_{l_2} t_{l_3} - \dots = \\ &= [l_1, l_2, l_3, \dots]_\alpha. \end{aligned}$$

Для класичного розкладу Люрота J. Galambos в 1976 році [3] показав, що для майже для всіх $x \in (0, 1]$ відносно міри Лебега

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log L_n(x)}{\log n} = 1.$$

де $L_n(x) = \max \{l_1(x), \dots, l_n(x)\}$ — найбільша цифра серед n перших цифр числа x .

Це означає, що майже для всіх x найбільші цифри x наближаються до нескінченності з лінійною швидкістю. З іншого боку, існують точки,

цифри яких можуть бути довільно великими. Це призводить до питання, чи можливо, що для якоїсь точки x , $L_n(x)$ може наближатися до нескінченності з іншою швидкістю. У зв'язку з цим було розглянуто множину

$$E(\alpha) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log L_n(x)}{\log n} = \alpha \right\} \quad (\alpha \geq 0),$$

в термінах розмірності Хаусдорфа. І доведено наступну теорему.

Теорема 1. Для деякого числа $\alpha \geq 0$, $\dim_H E(\alpha) = 1$.

Зауваження 1. Дану проблему для класичного розкладу Люрота було розглянуто L. Shen в роботі [4].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. Kesseböhmer, S. Munday, B.O. Stratmann. *Infinite Ergodic Theory of Numbers*. — 2016.
- [2] S. Munday *Finite and infinite ergodic theory for linear and conformal dynamical systems. PhD thesis*. — University of St. Andrews — 2011.
- [3] J. Galambos *Representations of Real Numbers by Infinite Series*. — Springer, 1976.
- [4] L. Shen, Y. Yu, Y. Zhou *A note on the largest digits in Luroth expansion* // Int. J. Number Theory. — 2014. — Т. 9, № 5. — С. 1015–1024.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: 18fmf.k.sokolova@std.npu.edu.ua

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОМЕНТІВ ОДНОГО РОЗПОДІЛУ З НЕЗАЛЕЖНИМИ Q_2 -СИМВОЛАМИ

Б. В. ХАЛЕЦЬКИЙ, О. П. МАКАРЧУК

Нехай $q_0 = \frac{1}{3}$, $q_1 = \frac{2}{3}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$. Добре відомо [1], що для кожного $x \in [0; 1]$ існує послідовність (α_n) кожний елемент якої рівний 0 або 1 така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right). \quad (1)$$

Нехай (ξ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0, 1 з ймовірностями $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}^{Q_2}.$$

Теорема 1. Для розподілу ξ виконуються умови

$$M(\xi^n) = \frac{3}{3^{n+1} - 2 - 3 \cdot 2^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_n^k M(\xi^k) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M(\xi^n)} = 1.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працевитый Н.В. *Распределения случайных величин с независимыми Q -символами.* // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1990. — С. 92-101.
- [2] Alberverio S., Goncharenko Y., Pratsiovyti M., Torbin G. *Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.* Random Oper. Stochastic Equations. — 2007. — 15.(1). P. 89-97.
- [3] Jessen B., Wintner A. *Distribution function and Riemann Zeta-function.* Trans.Amer.Math.Soc. — 1935. — 38. P.48-88.

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА, КРОПИВНИЦЬКИЙ, УКРАЇНА
Email address: chaletskiyv@meta.ua

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: makarchuk@imath.kiev.ua

ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ ТИПУ СЕРПІНСЬКОГО, ПОВ'ЯЗАНИХ З РЯДАМИ КАНТОРА

Н.В. ЧЕРЧУК, Н.А. ВАСИЛЕНКО

Класична неперервна ніде не диференційовна функція Серпінського [1] є одним з найпростіших (з точки зору задання) прикладів функцій з локальними особливостями, для задання якої використовуються п'ятіркова та трійкова системи зображення дійсних чисел. Наявний розвинутий апарат ефективних засобів побудови та дослідження функцій з локальними особливостями [3] дозволяє розширити класи таких функцій та вивчати інші їх властивості та застосування [2,4]. Саме одному з таких класів функцій, побудова якого містить конструкцію функції Серпінського, але використовує для задання канторівську систему зображення дійсних чисел і поліосновне Q_3 -зображення, присвячена дана доповідь.

Нехай $A_{s_k} \equiv \{0, 1, \dots, s_k - 1\}$ — послідовність алфавітів ($s_k = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$). Визначимо на A_{s_k} дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha \in A_k \setminus \{0, s_k - 1\}, \\ 2, & \text{якщо } \alpha = s_k - 1. \end{cases}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_{s_k}^\infty = A_1 \times \dots \times A_k \times \dots$ визначимо послідовність (c_k) :

$$c_1 = c_2 = 0, c_k = \begin{cases} c_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_{k-1} \neq \frac{s_{k-1} - 1}{2}, \\ 1 - c_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_{k-1} = \frac{s_{k-1} - 1}{2}. \end{cases}$$

Розглядається сім'я неперервних ніде не диференційовних на відрізку $[0; 1]$ функцій, аргумент якої подається канторівським зображення дійсних чисел з послідовністю основ (s_k) :

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_k} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{(s_k)}, A_{s_k} \equiv \{0, 1, \dots, s_k - 1\},$$

а значення функції має наступний Q_3 -розклад

$$g(x) = g(\Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_k(x) \dots}^{(s_k)}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dots}^{Q_3}, \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},$$

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k \neq 0, \end{cases}$$

Теорема 1. *Функція g є неперервною в кожній точці відрізка $[0; 1]$.*

Теорема 2. *Функція g є ніде не монотонною на відрізку $[0; 1]$, приріст якої на кожному циліндрі $\Delta_{d_1 d_2 \dots d_m}^{s_k}$ рангу m визначається за формулою*

$$\mu_g(\Delta_{d_1 d_2 \dots d_m}) = (-1)^{c_m} \prod_{i=1}^m g_{d_i}.$$

Теорема 3. *Функція g є ніде не диференційовною.*

У доповіді пропонуються результати досліджень структурних, диференціальних властивостей та фрактальних властивостей множин рівнів класу функцій g .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Sierpinski W.* Arytmetyczny przykład funkcji ciągłej, nierozniczkowalnej // *Wektor.* – 1914. – № 8. – Р. 337–343.
- [2] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // *Int. J. of Math. Anal.* – 2013. – **7**(64). – Р. 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278
- [3] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.
- [4] *Працьовитий М. В., Черчук Н. В., Вовк Ю. Ю., Шевченко А. В.* Ніде не монотонні функції, пов'язані з зображеннями чисел рядами Кантора. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, 2019, Том 16, № 3. — С. 232–243.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: nadiacercuk@gmail.com

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: vasylenkonnn@gmail.com

АРИФМЕТИЧНА СУМА ЧИСЛОВИХ МНОЖИН І КАНТОРВАЛИ

Д.С. ШПИТЮК

Арифметична сума числових множин це бінарна алгебраїчна операція, яка двом числовим множинам A і B ставить у відповідність числову множину C , таку що $C = A \oplus B = \{x : x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

Відомо, що *арифметична сума двох* 1) відкритих числових множин є відкритою множиною, 2) замкнених множин є замкненою множиною, 3) досконалих множин є досконалою множиною, 4) рівнопотужних (різнопотужних) множин успадковує потужність масивнішої множини.

Ми цікавимось арифметичною сумою множин, що мають складну локальну структуру, зокрема є самоподібними, самоафінними тощо.

Нехай $A_s = \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$ – алфавіт, $L_s = \{(\alpha_n) : \alpha_n \in A_s, n \in N\}$. Тоді $\forall x \in [0; 1] \exists (\alpha_n) \in L_s$, така що $x = \sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} \alpha_i \equiv \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^s$, де $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^s$ називається s -ковим зображенням числа.

Розглядається *класична множина Кантора*

$C[3; \{0, 2\}] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3, \alpha_n \in \{0, 2\}, n \in N\}$,
і множина *канторівського типу* (досконала ніде не щільна)

$C[9; \{0, 1, 7, 8\}] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^9, \alpha_n \in \{0, 1, 7, 8\}, n \in N\}$.

Теорема 1. *Арифметична сума множини $C[3; \{0, 2\}] \oplus C[9; \{0, 1, 7, 8\}]$ є канторвалом.*

Зауважимо, що *канторвалом* називається множина гомеоморфна множині $T = [0; 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n}$, $G_k = \bigcup_{\alpha_1 \in 0,2} \dots \bigcup_{\alpha_{k-1} \in \{0,2\}} (\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} 1(0)}^3; \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} 1(2)}^3)$.

У доповіді будуть представлені результати дослідження властивостей арифметичних сум множин канторівського типу, зокрема таких, що є множинами неповних сум додатних рядів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сигулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [2] Шпитюк Д.С. Арифметична сума множин канторівського типу // Студ. фіз-мат етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2022. — № 22. — С. 57-67.

УДУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
Email address: darina.shpytyuk@gmail.com

Секція 3. «Алгебри, дискретної математики»

Керівники: Олійник Богдана Віталіївна, Петравчук Анатолій Петрович

ВІДНОВЛЮЮЧЕ СПЕКТРАЛЬНЕ ЧИСЛО ГРАФА K_4

ОЛЕКСАНДР АВЕРКІН, ЛАРИСА ТИМОШКЕВИЧ

В спектральній теорії графів велике значення мають різноманітні задачі відновлення графів (див. [1], [2], [3]).

Означення 1. Зважений граф $G = (V, E, w)$ визначається множиною вершин V , де V — непорожня скінченна множина, множиною ребер E , де E — довільна підмножина множини всіх неупорядкованих пар різних елементів множини V , а також ваговою функцією $w : E \rightarrow (0, +\infty)$, яка ставить у відповідність кожному ребру e числове значення $w(e)$.

Постановка задачі. Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай ми маємо граф G , нашою метою є однозначне відновлення вагової функції w зваженого графа $G = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто нас цікавить можливість визначення ваг на ребрах вихідного графа за значеннями спектрів цих підграфів. Спектр підграфа будемо називати підспектром. Мінімальну кількість таких підспектрів, за якими можна однозначно відновити вагову функцію, будемо позначати як відновлююче спектральне число графа G , тобто $Srn(G)$. Кожен граф G породжує дві задачі: наведення прикладів підспектрів, за якими можливе відновлення, та знаходження відновлюючого спектрального числа.

Лема 1. *Відновлення ваг за спектрами підграфів може бути розглянуто як аналогічна задача відновлення, проведеного за характеристичними многочленами цих підграфів.*

Означення 2. Лінійний підграф графа G є підграфом, у якому всі компоненти зв'язності складаються лише з ланцюгів на двох вершинах (ребер) та простих циклів. Позначимо його як H_k , де k — це кількість вершин у цьому підграфі.

Означення 3. Каркасний підграф графа G — це лінійний підграф, який включає всі вершини початкового графа.

Запровадимо деякі позначення для лінійного підграфа H_k : $p(H_k)$ — кількість компонент зв'язності, які містять парну кількість вершин; $r(H_k)$ — загальна кількість компонент зв'язності; $s(H_k)$ — множина компонент зв'язності, які є циклами. Крім того, за $w(H_k)$ будемо позначати вагу H_k , яка обчислюється як добуток ваг його компонент зв'язності. Вага

компоненти зв'язності, що є ребром (i, j) , дорівнює w_{ij}^2 , а вага компоненти зв'язності, що є циклом, розраховується як добуток значень w_{ij} по всім його ребрам (i, j) .

Теорема 1. [4] Якщо $P_G(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$,

– характеристичний многочлен графа $G = (G, w)$, то

$$(1) \ c_1 = 0;$$

$$(2) \ c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2$$

$$(3) \ c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k) \text{ для } k = 1, \dots, n$$

Твердження 1. Згідно теореми 1 характеристичний многочлен для повного графа K_4 (рисунок 1) має наступний вигляд:

$$P_{K_4}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) - 2\lambda(a_1 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_6 + a_2 a_3 a_5 + a_3 a_4 a_6) + a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_4^2 + a_5^2 a_6^2 - 2(a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_5 a_6 + a_2 a_4 a_5 a_6)$$

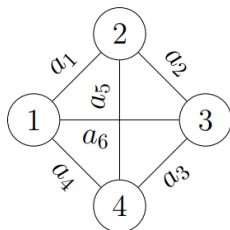


Рис. 1

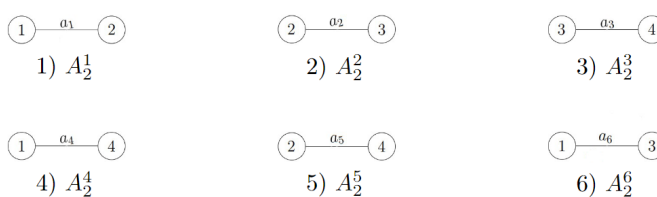


Рис. 2

Теорема 2. Для повного графа K_4 відновлююче спектральне число $Sr_n(K_4) = 6$ та для відновлення вагової функції w треба знати підспектри таких 6 підграфів: $A_2^1, A_2^2, A_2^3, A_2^4, A_2^5, A_2^6$ (рисунок 2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cvetkovic D.M. The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs / Cvetkovic D.M., Gutman I. // Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. – 1975. – 498–541. – P. 45–48.
- [2] van Dam E.R. Which graphs are determined by their spectrum / van Dam E.R., Haemers W.H. // Linear Algebra and its Applications. – 2003. – vol. 373. – P. 241–272.
- [3] Hogben L. Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph / Hogben L. // Chamchuri Journal of Mathematics. – 2009. – vol 1, no. 1 – P. 51–72.
- [4] H. Sachs. Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom/ H. Sachs.// Publ. Math. Debrecen - 1964. - P. 119–134.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Email address: avierkin03@gmail.com

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Email address: larysatymosh@gmail.com

ПРО БЛОКИ У ГРАФАХ ІЗ ПАРНИМИ ТА НЕПАРНИМИ ВІДСТАННЯМИ МІЖ НЕ ТОЧКАМИ З'ЄДНАННЯ

К.О. АНТОШИНА, С.О. КОЗЕРЕНКО

Вершина графа називається точкою з'єднання, якщо її видалення збільшує кількість компонент зв'язності. Наприклад, для зв'язного графа G вершина $u \in V(G)$ є точкою з'єднання, якщо граф $G - u$ незв'язний. Дерево – це зв'язний ациклічний граф. Легко бачити, що не точками з'єднання дерева є в точності вершини степеня 1, які називаються висячими. У роботі [3] досліджувався спеціальний клас графів під назвою сильно унікально незалежні графи. Це такі графи G , в яких існує єдина максимальна незалежна множина вершин $A \subset V(G)$, що її доповнення $V(G) \setminus A$ теж незалежна в G . Зокрема, було показано, що сильно унікально незалежні дерева (надалі просто SUIT) характеризуються як дерева із парними відстанями між їхніми висячими вершинами. Узагальнюючи цей клас дерев, у роботі [1] було розглянуто зв'язні графи із парними відстанями між їхніми не точками з'єднання (NCE-графи) та графи з цими непарними відстанями (NCO-графи).

Твердження 1. [1] *Зв'язний граф є NCE-графом тоді й тільки тоді, коли він двочастковий, причому всі його не точки з'єднання лежать у спільній частці.*

Реберним графом $L(G)$ графа G називається граф перетинів родини $E(G)$. Тобто, вершинами $L(G)$ є ребра G , а ребрами – пари ребер G , які мають спільну вершину.

Теорема 1. [1] *Зв'язний граф є NCO-графом тоді й тільки тоді, коли він ізоморфний реберному графу деякого SUIT'a.*

Граф називається двозв'язним, якщо він зв'язний та не має точок з'єднання. Блок у графі – це його максимальний двозв'язний підграф. Графом блоків $B(G)$ графа G називається граф перетинів множин вершин усіх блоків у G . Таким чином, вершинами $B(G)$ є блоки G , а ребрами – пари блоків, які містять (єдину) спільну точку з'єднання.

Теорема 2. [2] *Граф H ізоморфний графу блоків деякого графа G тоді й лише тоді, коли в H кожен блок є повним підграфом.*

Наприклад, дерева є графами блоків. Блок у графі називатимемо висячим, якщо він має не більше одної точки з'єднання.

Твердження 2. *Кожен висячий блок у NCE-графі є висячим ребром.*

Із Твердження 2 одразу слідує, що будь-який NCE-граф із хоча би двома вершинами має хоча би дві висячі вершини. Наступна теорема описує NCE-графи з рівно двома висячими вершинами. Позначимо через $B_2(G)$ підграф графа блоків $B(G)$, який породжений усіма мостами в G .

Теорема 3. *Граф G є NCE-графом із рівно двома висячими вершинами тоді й тільки тоді, коли G – непарний ланцюг або G не ланцюг і виконані наступні умови:*

- (1) *граф блоків $B(G)$ є ланцюгом із хоча би двома вершинами;*
- (2) *кожен блок у G ізоморфний K_2 або $K_{2,m}$ для $m \geq 2$;*
- (3) *кожен блок $B \simeq K_{2,m}$ із $m \geq 2$ у G має точно дві точки з'єднання в G , які складають частку B ;*
- (4) *кожна компонента зв'язності $B_2(G)$, яка не містить висячі вершини з $B(G)$, має парну кількість вершин;*
- (5) *кожна компонента зв'язності $B_2(G)$, яка містить висячі вершини з $B(G)$, має непарну кількість вершин.*

Використовуючи схожу ідею, що і в доведенні теореми 2, отримано наступний результат.

Твердження 3. *Кожен зв'язний граф блоків ізоморфний графу блоків деякого NCE-графа.*

Для NCO-графів це питання також має доволі просту відповідь.

Твердження 4. *Граф H є графом блоків деякого NCO-графа тоді й тільки тоді, коли H є SUIT'ом.*

Зауважимо, що оскільки реберні графи дерев збігаються з їхніми графами блоків, то теорему 1 можна вважати описом графів блоків SUIT'ів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] K. Antoshyna and S. Kozerenko, *Graphs with odd and even distances between non-cut vertices* // preprint submitted to publication, 2023.
- [2] F. Harary, *A characterization of block graphs* // Canad. Math. Bull. **6** (1963), 1–6.
- [3] G. Hopkins and W. Staton, *Graphs with unique maximum independent sets* // Discrete Math. **57**(3) (1985), 245–251.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kantoshyna@imath.kiev.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ
КИЇВСЬКА ШКОЛА ЕКОНОМІКИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

ЧИСЛО ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ ДЛЯ ALL-PATH ОПУКЛОСТІ ТА НОВИЙ АЛГОРИТМ

В.О. ГАПОНЕНКО, С.О. КОЗЕРЕНКО

Застосування абстрактної теорії опуклості [7] в теорії графів зробило значний внесок у вирішення задач комп'ютерного зору [6] та актуальних задач пов'язаних із поширенням інфекції [1]. За допомогою концепцій з теорії опуклості був представлений спосіб відновлення графа [3], який може бути використаним для застосувань пов'язаних зі збереженням даних.

Центральним поняттям цієї доповіді є графова all-path опуклість, яка вперше була представлена у роботі [5]. Пізніше в статті [4] була надана характеристика all-path опуклих множин та досліджені алгоритмічні аспекти цієї опуклості. All-path опуклість породжена інтервальною функцією $I: V \times V \rightarrow 2^V$, яка парі вершин графа ставить у відповідність множини вершин всіх простих ланцюгів між ними. Таким чином, all-path опуклою (або просто, AP-опуклою) множиною називається підмножина графа $S \subset V(G)$ така, що $I(a, b) \subset S$ для всіх $a, b \in S$.

Важливим аспектом дослідження абстрактних опуклостей є обчислення їх числових інваріантів. Одним із них є число загального положення (або просто, гр-число). А саме, нехай (X, I) – множина із заданою інтервальною функцією на ній. Тоді гр-число це потужність найбільшої підмножини $A \subset X$, що $I(a, b) \cap A = \{a, b\}$ для всіх $a, b \in A$. Називатимемо блок у графі блоком-листом, якщо він має рівно одну точку з'єднання.

Теорема 1. [2] *У зв'язному але не двозв'язному нетривіальному графі гр-число для all-path опуклості дорівнює кількості його блоків-листків.*

Також ми презентуємо покращення алгоритму зі статті [4] для визначення того чи множина $S \in$ AP-опуклою. Найгірша часова складність нашого алгоритму $T(G) = |V(G)| + 4|E(G)|$, що перевершує відомий алгоритм (адже найкраща його часова складність $T(G) = 2|V(G)| + 4|E(G)|$) [2].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] C.C. Centeno, S. Dantas, M.C. Dourado, D. Rautenbach and J.L. Szwarcfiter, *Convex partitions of graphs induced by paths of order three* // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **12(5)** (2010), 175–184.
- [2] V. Haponenko and S. Kozerenko, *All-path convexity: two characterizations, general position number, and one algorithm* // Discrete Math. Lett. **13** (2024), 58–65.

- [3] O.R. Oellermann, *On domination and digital convexity parameters* // J. Combin. Math. Combin. Comput. **85** (2013), 273–285.
- [4] F. Protti and J. V. C. Thompson, *All-path convexity: combinatorial and complexity aspects* // Ars Combin. **148** (2020), 77–87.
- [5] E. Sampathkumar, *Convex sets in a graph* // Indian J. Pure Appl. Math. **15** (1984), 1065–1071.
- [6] Z. Shen et al., *Combining convex hull and directed graph for fast and accurate ellipse detection* // Graph. Models **116** (2021), article 101110.
- [7] M. L. J. van de Vel, *Theory of convex structures*. Elsevier, 1993.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: vladyslav.haponenko@gmail.com

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ
КИЇВСЬКА ШКОЛА ЕКОНОМІКИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kozerenkoserhiy@ukr.net

КОНСТРУКЦІЯ ЗНАКОВОГО РЕБЕРНОГО ГРАФА

Б.-Я.В. ДЕХТЯР, С.О. КОЗЕРЕНКО

Для оргграфа $D = (V(D), A(D))$, його реберним оргграфом [1] називається оргграф $L(D)$ із множиною вершин $V(L(D)) = A(D)$ і множиною дуг $A(L(D)) = \{(\alpha, \beta) : h(\alpha) = t(\beta)\}$ (тут для дуги $\alpha = (u, v)$ ми позначаємо $h(\alpha) = u$ і $t(\alpha) = v$). Таким чином, вершинами реберного оргграфа є дуги D , а дугами – пари дуг, які йдуть “одна в одну”. Схожим чином визначається й реберний граф $L(G)$ для неорієнтованих графів G . Виявляється, що на неорієнтованих графах графовий оператор L майже ін’єктивний [2]. А саме, має місце відома теорема Вітні: маючи реберний граф, ми можемо однозначно відновити початковий граф (із точністю до ізоморфізму), за винятком пари графів K_3 , $K_{1,3}$. З іншого боку, реберний оператор L на орієнтованих графах не має такої властивості.

У цій роботі ми введемо нову конструкцію, яка разом із реберним оргграфом дозволить однозначно відновити початковий оргграф. Спочатку нам знадобиться поняття знакового графа. Для графа G знаковою функцією називається довільне відображення вигляду $s : E(G) \rightarrow \{+, -\}$, що переводить ребра G у знаки $+$ та $-$. Знаковий граф – це пара (G, s) , де s є знаковою функцією на G .

Маючи оргграф D , назовемо його знаковим реберним графом $Cs(D)$ впорядковану пару (G, s) , де G – це неорієнтований граф із множиною вершин $V(G) = A(D)$ і множиною ребер $E(G) = \{\alpha\beta : h(\alpha) = h(\beta) \text{ або } t(\alpha) = t(\beta)\}$, а знакова функція $s : E(G) \rightarrow \{+, -\}$ діє за правилом: $s(\alpha\beta) = +$, якщо $h(\alpha) = h(\beta)$. Таким чином, вершинами знакового графа $Cs(D)$ є дуги D , його ребра відповідають парам дуг зі спільним початком чи спільним кінцем; s же є знакова функція на G така, що ребро $\alpha\beta$ є позитивним, якщо кінці цих дуг співпадають (і негативним, якщо дуги мають однаковий початок).

Правильним розфарбуванням на вершинах графа називатимемо таке розфарбування його вершин у два кольори, за якого кожній парі суміжних вершин приписуються різні кольори. Графом клік $K(G)$ називається граф перетинів множин вершин усіх клік (максимальних повних підграфів) у графі G . Перший наш результат є характеристизація знакового реберного графа.

Теорема 1. Нехай G є неорієнтований граф, а $s : E(G) \rightarrow \{+, -\}$ є знакова функція на ребрах G . Тоді $(G, s) = Cs(D)$ для деякого орграфа D тоді й тільки тоді, коли:

- (1) кожна кліка G містить ребра одного знаку;
- (2) s породжує правильне розфарбування на вершинах $K(G)$.

Зауважимо, що наведена теорема має такий наслідок: якщо для графа G існують знакова функція s та орграф D такі, що $(G, s) = Cs(D)$, то G є реберний граф двочасткового графа.

Нехай L є реберний орграф, $Cs = (G, s)$ є знаковий реберний граф (граф, що задовольняє умови теореми 1) і $|V(L)| = |V(G)|$. Тоді бієкція $\phi : V(L) \rightarrow V(G)$ називається допустимою, якщо існує орграф D , для якого виконуються наступні умови:

- $L(D) \simeq L$; назвемо відповідний ізоморфізм $\psi_L : V(L(D)) \rightarrow V(L)$.
- $Cs(D) \simeq Cs$; назвемо відповідний ізоморфізм $\psi_{Cs} : V(G) \rightarrow V(Cs)$.
- $\phi \circ \psi_L = \psi_{Cs}$.

Зауважимо, що області визначення функцій $\phi \circ \psi_L$ та ψ_{Cs} однакові й дорівнюють $A(D) = V(L(D)) = V(G)$.

Теорема 2. Для реберного орграфа L і знакового реберного графа $Cs = (G, s)$ бієкція $\phi : V(L) \rightarrow V(G)$ є допустимою тоді й тільки тоді, коли:

- для всіх $u \in V(L) : \phi(N_L^+(u))$ є негативна кліка в Cs , а $\phi(N_L^-(u))$ є позитивна кліка;
- Якщо K є позитивна (негативна) кліка в Cs , то для всіх $u, v \in \phi^{-1}(V(K))$ виконано $N_L^+(u) = N_L^+(v)$ ($N_L^-(u) = N_L^-(v)$).

Твердження 1. Нехай L є реберний орграф, $Cs = (G, s)$ є знаковий реберний граф, а $\phi : V(L) \rightarrow V(G)$ є допустима бієкція між ними. Тоді існує єдиний орграф D із $L \simeq L(D)$ та $Cs \simeq Cs(D)$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] F. Harary and R. Z. Norman, *Some properties of line digraphs* // Rend. Circ. Mat. Palermo **9** (1960), 161–168.
- [2] H. Whitney, *Congruent graphs and the connectivity of graphs* // Amer. J. Math. **54**(1) (1932), 150–168.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, Київ, Україна
Email address: b.dekhtiar@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ
КИЇВСЬКА ШКОЛА ЕКОНОМІКИ, Київ, Україна
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

КОГОМОМОРФІЗМИ ГРАФІВ І МЕТРИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ МІЖ ЇХНІМИ ДОПОВНЕННЯМИ

А.О. ГАК, Ю.-Л.В. ДЕХТЯР, С.О. КОЗЕРЕНКО, І.П. РОМАНЮК

У роботі розглядаються лише прості неорієнтовані скінченні графи. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між множинами вершин двох графів G , H називається гомоморфізмом, якщо для всіх ребер $uv \in E(G)$ виконується $f(u)f(v) \in E(H)$.

Для зв'язного графа G через d_G позначатимемо звичайну відстань на множині вершин $V(G)$, де $d_G(u, v)$ дорівнює довжині найкоротшого ланцюга між u та v у G . Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома зв'язними графами G і H називається метричним, якщо $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v)$ для всіх пар вершин $u, v \in V(G)$. Наступний результат показує, що гомоморфізми є метричними відображеннями.

Твердження 1. [2] *Нехай G і H зв'язні графи. Тоді $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є метричним тоді й тільки тоді, коли $f(u)f(v) \in E(H)$ або $f(u) = f(v)$ для всіх ребер $uv \in E(G)$.*

Цей критерій метричних відображень можна використати як їхнє означення на випадок будь-яких (не обов'язково зв'язних) графів.

Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ називається когомоморфізмом [1], якщо $f^{-1}(e) \in E(G)$ для всіх ребер $e \in E(H[\text{Im } f])$. Наприклад, якщо образ $\text{Im } f$ є незалежною множиною, тоді f є когомоморфізмом. Також із означення одразу слідує, що кожен когомоморфізм між G і H є метричним відображенням між доповненнями $\overline{G}$ і $\overline{H}$. Проте, не навпаки: розглянемо відображення f циклу C_4 у K_2 , при якому пари протилежних вершин із C_4 переходять у дві вершини K_2 . Тоді f є метричним між $\overline{C_4} = 2K_2$ і $\overline{K_2}$, але не є когомоморфізмом. Ми покажемо, що ці два класи відображень досить сильно відрізняються навіть у класі гомоморфізмів.

Спершу ми наведемо характеристику гомоморфізмів, які є метричними відображеннями між доповненнями. Нагадаємо, що дві вершини $u, v \in V(G)$ називаються фальшивими близнюками, якщо $N_G(u) = N_G(v)$ (тут $N_G(x) = \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$ позначає окіл вершини x у графі G).

Теорема 1. *Для $f : V(G) \rightarrow V(H)$ наступні умови еквівалентні:*

- (1) *f є гомоморфізмом між G , H і метричним між $\overline{G}$, $\overline{H}$;*
- (2) *для всіх $u, v \in V(G)$ маємо: $uv \in E(G)$ тоді й лише тоді, коли $f(u)f(v) \in E(H)$;*

(3) f задовольняє дві умови:

- для всіх $u, v \in V(G)$ із $f(u) = f(v)$ слідує $u = v$ або u, v є фальшивими близнюками;
- f індукує ізоморфізм $G/R_f \simeq H[\text{Im } f]$ (тут $R_f = \{(u, v) \in V(G)^2 : f(u) = f(v)\}$).

Наслідок 1. Для графів G і H існує гомоморфізм $f : V(G) \rightarrow V(H)$, який є метричним відображенням між їхніми доповненнями тоді й тільки тоді, коли існує відношення еквівалентності R на $V(G)$ таке, що R є подрібненням відношення “бути фальшивими близнюками” й фактор-граф G/R ізоморфний деякому породженому підграфу H .

Для опису когоморфізмів графів нам знадобляться нові позначення. Через $\text{Iso}(G)$ ми позначаємо множину ізольованих вершин графа G . Для відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ покладемо

$$A(f) = \{u \in V(G) : f(u) \notin \text{Iso}(H[\text{Im } f])\}.$$

Теорема 2. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є когоморфізмом тоді й тільки тоді, коли звуження f на $A(f)$ є ін’єкцією, а обернене відображення $f^{-1} : f(A(f)) \rightarrow A(f)$ є гомоморфізмом між відповідними породженими підграфами.

Наслідок 2. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є гомоморфізмом та когоморфізмом тоді й тільки тоді, коли $f(\text{Iso}(G)) = \text{Iso}(H[\text{Im } f])$ та звуження f на $V(G) \setminus \text{Iso}(G)$ є ізоморфізмом на свій образ.

Наслідок 3. Нехай G і H зв’язні графи. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є одночасно гомоморфізмом і когоморфізмом тоді й тільки тоді, коли f є ізоморфізмом на свій образ.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] P. Hell and J. Nešetřil, *Cohomorphisms of graphs and hypergraphs* // Math. Nachr. **87** (1979), 53–81.
- [2] S. Kozerenko, *Linear and metric maps on trees via Markov graphs* // Comment. Math. Univ. Carolin. **59** (2018), 173–187.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: artikgak@ukr.net

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: y.dekhtiar@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ
КИЇВСЬКА ШКОЛА ЕКОНОМІКИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: i.romaniuk@ukma.edu.ua

ONE GENERALIZATION OF THE SPECIAL LINEAR GROUP AND MATRIX EQUATIONS

RUSLAN SKURATOVSKII¹, OLHA ZAKOLENKO²

We generalize the group of unimodular matrices [1] and find its structure. For this goal we propose one extension of the special linear group.

Let $SL_2(\mathbb{F}_p)$ denotes the special linear group of degree 2 over a finite field of order p .

Definition 1. *The set of matrices*

$$\{M_i : \text{Det}(M_i) = \pm 1, M_i \in GL_2(\mathbb{F}_p)\}$$

forms extended special linear group in $GL_2(\mathbb{F}_p)$ and is denoted by $ESL_2(\mathbb{F}_p)$.

As it is studied by us $ESL_2(\mathbb{F}_p)$ has a structure of semidirect product $SL_2(\mathbb{F}_p) \rtimes \mathbb{C}_2$, where $\mathbb{C}_2 \simeq \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Theorem 1. *Let A be a simple matrix and $A \in SL_2(\mathbb{F})$ [2], then for A there is a solution $B \in SL_2(\mathbb{F})$ of the matrix equation*

$$X^2 = A \tag{1}$$

if and only if

$$\text{tr} A + 2 \tag{2}$$

is a quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0, where $\mathbb{F}$ is a field.

If $X \in ESL_2(\mathbb{F})$ then the matrix equation (1) has a solutions iff

$$\text{tr} A \pm 2 \tag{3}$$

is a quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0. This solution $X \in ESL_2(\mathbb{F}) \setminus SL_2(\mathbb{F})$ iff $(\text{tr} A - 2)$ is quadratic element or 0 in $\mathbb{F}$ but $(\text{tr} A + 2)$ is not. Conversely $X \in SL_2(\mathbb{F})$ iff $(\text{tr} A + 2)$ is quadratic element. Solutions belong to $ESL_2(\mathbb{F})$ and $SL_2(\mathbb{F})$ iff $(\text{tr} A + 2)$ and $(\text{tr} A - 2)$ are quadratic elements. In the case $A \in GL_2(\mathbb{F})$ this condition (2) takes form:

$$\text{tr} A \pm 2\sqrt{\det A} \tag{4}$$

is a quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0 and $\det A$ is quadratic too.

Theorem 2. *If a matrix $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ is semisimple [2] with different eigenvalues and at least one an eigenvalue $\lambda_i \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$, $i \in \{1, 2\}$, $p > 2$, then $\sqrt{A} \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ iff of A satisfies:*

$$\left(\frac{\lambda_i}{p}\right) = 1 \text{ in the square extention that is } \mathbb{F}_{p^2}.$$

Matrices with a determinant -1 correspond to the elements changing Euclidean space orientation.

Corollary 1. *Let A be simple matrix and $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ [2], then for matrix $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ there is a solution $B \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ of the matrix equation*

$$X^2 = A \tag{5}$$

if and only if

$$\left(\frac{\text{tr } A + 2}{p}\right) \in \{0, 1\}. \tag{6}$$

If $X \in ESL_2(\mathbb{F}_p)$ then the matrix equation (5) has a solution iff

$$\left(\frac{\text{tr } A \pm 2}{p}\right) \in \{0, 1\}. \tag{7}$$

This solution $X \in ESL_2(\mathbb{F}_p) \setminus SL_2(\mathbb{F}_p)$ iff $\left(\frac{\text{tr } A - 2}{p}\right) = 1$ or 0 , but $\left(\frac{\text{tr } A + 2}{p}\right) = -1$. Conversely $X \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ iff $\left(\frac{\text{tr } A + 2}{p}\right) = 1$. Solutions $X_i \in ESL_2(\mathbb{F})$ and $SL_2(\mathbb{F})$ iff $\left(\frac{\text{tr } A + 2}{p}\right) = 1$ and $(\text{tr } A - 2) = 1$. In the case $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ this condition (2) takes form:

$$\left(\frac{\text{tr } A \pm 2\sqrt{\det A}}{p}\right) \in \{0, 1\}. \tag{8}$$

Corollary 2. *If $A \in GL(F_2)$ the condition 2 takes the form: $\left(\frac{\text{tr } A}{p}\right) \in \{0, 1\}$.*

REFERENCES

- [1] Amit Kulshrestha and Anupam Singh. Computing n -th roots in SL_2 and Fibonacci polynomials. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* (2020) 130:31 <https://doi.org/10.1007/s12044-020-0559-8>.
- [2] Klyachko Anton A., Baranov D. V. Economical adjunction of square roots to groups. *Sib. math. journal*, Volume 53 (2012), Number 2, pp. 250-257.

V.I. VERNADSKY TAURIDA NATIONAL UNIVERSITY, KYIV, UKRAINE
Email address: skuratovskii.ruslan@tnu.edu.ua

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA ACADEMY OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: o.zakolenko@ukma.edu.ua

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗЛІЧЕННИХ ГРАФІВ КОКСТЕРА

$\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ ІНДЕКСУ У ПРОМІЖКУ $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

К. ЛУЧКА, Л. ТИМОШКЕВИЧ

Досліджена класифікація злічених графів Кокстера $\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$ зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$. Існує декілька підходів для розширення спектральної теорії графів зі скінченного випадку на злічений, у роботі прийнято підхід В. Моһар (див. [1]). Індеси графів мають широке коло застосувань, наприклад, у теорії представлень (див. [2]). Обмеження на індекс графа впливають на структуру графа, часто можна навести повний перелік можливих графів, що задовольняють їм (див. [3, 4, 5, 6]).

Граф визначається як впорядкована пара $G = (V, E)$, де V є непорожньою множиною, а E — підмножиною множини усіх неупорядкованих пар деяких елементів з V . V відома як *множина вершин* графа G , і E відома як *множина ребер* графа G .

Граф Кокстера $\mathbf{G}$ визначається як пара (G, f) , де G — граф, f — відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, котрі не менші за 3 та символа ∞ . Граф G називається підпорядкованим графу Кокстера $\mathbf{G} = (G, f)$.

Зображення графа Кокстера представляють діаграмою підпорядкованого графа з позначкою $f(e)$ над кожним ребром e . Число 3 над ребрами *не пишеться* і такі ребра є *непозначеними*. Інші ребра, котрі мають позначку 4 і вище, називають *позначеними*.

Зліченим графом Кокстера називають граф зі зліченою множиною вершин. Позначимо через $\text{Fin}(\mathbf{G})$ множину всіх скінченних підграфів графа $\mathbf{G}$.

Спектр матриці — це множина усіх її власних значень. Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ скінченного графа $\mathbf{G}$ порядку n симетрична, то його спектр складається лише з дійсних чисел. Позначимо власні значення матриці як λ_i , де $(i = 1, \dots, n)$ та розташуємо точки спектру λ_i в порядку спадання: $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Спектром графа $\mathbf{G}$ називають спектр матриці суміжності $A(\mathbf{G})$. Позначають як $\sigma(\mathbf{G})$. Він не залежить від способу нумерації вершин, а тому є інваріантом.

Характеристичним многочленом матриці суміжності називають $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

Індексом графа називають найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ матриці суміжності A графа $\mathbf{G}$.

Індексом зліченного графа називаємо додатне число або символ ∞ , визначені рівністю

$$\text{ind } \mathbf{G} = \sup_{\Gamma \in \text{Fin}(\mathbf{G})} \text{ind } \Gamma$$

Теорема 1. Нехай $\mathbf{G}$ – злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим $T_{2,n+m+1,\infty}^4$ -графом, тоді

- якщо $n = 1$, то $\text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 < \frac{3}{\sqrt{2}}$
- якщо $n \geq 2$, то $\text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 > \frac{3}{\sqrt{2}}$

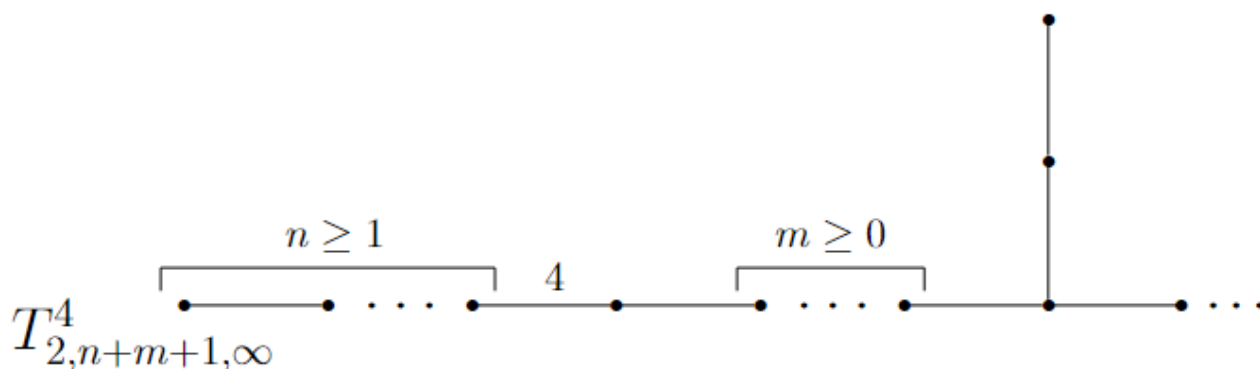


Рис. 1

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Mohar B., Woess W. A survey on spectra of infinite. Bull. London Math. Soc. – 1989. – vol. 21. – P. 209-234.
- [2] Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченими деревами Кокстера, Український математичний журнал. – 2014. – Том. 66, №9. – С.1185-1192.
- [3] Tymoshkevych L. M. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. – 2014. – випуск №1. – С. 27-33.
- [4] Коротков А.С., Тимошкевич Л.М. Аналог теореми Сміта для злічених графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – №12. – С. 19-24.
- [5] Тимошкевич Л.М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ, 2015. – 160 с.
- [6] Тимошкевич Л.М., Когут М.В. Класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, Могиланський математичний журнал. – Том 5, – 2022, – с.19-25.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Email address: `kate.luchka@gmail.com`

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Email address: `larysatymosh@gmail.com`

ПРО T -ГРУПОЇДИ НА СКІНЧЕННИХ ДЕРЕВАХ

К.О. АНТОШИНА, С.О. КОЗЕРЕНКО, К.І. ПЕРВУШИН

В цій роботі всі графи прості, неорієнтовані, скінченні та зв'язні. Граф називається геодетичним, якщо між кожною парою його вершин існує єдиний найкоротший ланцюг. Наприклад, повні графи, непарні цикли та дерева є геодетичними графами.

На множині вершин $V(G)$ геодетичного графа G коректно визначена бінарна операція $+$: для $u, v \in V(G)$ покладемо $u + u = u$ та для $u \neq v$, $u + v$ є першою вершиною, відмінною від u , що лежить на (єдиному) найкоротшому ланцюгу між u та v . Пара $(V(G), +)$ називається T -групоїдом (англ. travel groupoid [1]), породженим геодетичним графом G . Наприклад, якщо $uv \in E(G)$, то $u + v = v$, а $v + u = u$. Якщо $d_G(u, v) = 2$, то $u + v = v + u$ – єдина вершина, яка суміжна з обома вершинами u, v у G .

Ми розглядатимемо властивості T -групоїдів лише на деревах. Отже, нехай T – скінченне дерево. Із означення одразу випливає, що операція $+$ є ідемпотентною на $V(T)$. Також, $+$ комутативна лише у випадку, коли $T \simeq K_{1,n-1}$ – зірка. Дійсно, неважко побачити, що $a + b = b + a$ тоді й тільки тоді, коли $a = b$ або $d_T(a, b) = 2$.

Твердження 1. *Кількість (невпорядкованих) комутуючих пар вершин відносно $+$ на дереві T дорівнює $1 + \frac{1}{2}M_1(T)$, де $M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G^2(u)$ – це перший загребський індекс графа G .*

Питання опису асоціативних трійок для операції $+$ є дещо цікавішим.

Теорема 1. *Нехай T – дерево. Впорядкована трійка $(a, b, c) \in V(T)^3$ є асоціативною для $+$ тоді й тільки тоді, коли $a = b$, або $a + b = c$, або $b + c = a$.*

Із теореми 1 одразу можна обчислити кількість таких трійок, яка як виявляється, не залежить від структури самого дерева.

Наслідок 1. *Кількість асоціативних трійок відносно $+$ на n -вершинному дереві дорівнює $3n^2 - 2n$.*

Зауважимо, що опис асоціативних трійок лише через операцію $+$ (а не структуру дерева) є не випадковим, адже в роботі [1] була отримана абстрактна характеристика T -групоїдів за допомогою трьох властивостей.

Нехай тепер $(X, \circ)$ – деякий групоїд. Його підгрупоїдом називається підмножина $A \subset X$, замкнена відносно операції $\circ$.

Твердження 2. *Нехай T – дерево. Тоді $A \subset V(T)$ є підгрупоїдом відносно $+$ тоді й тільки тоді, коли A – зв’язна множина.*

Як і підгрупи в групі, підгрупоїди в групоїді утворюють решітку відносно включення. Для T -групоїдів ця решітка вивчалась раніше в роботі [2].

Множину $A \subset X$ в групоїді $(X, \circ)$ назвемо твірною, якщо найменшим підгрупоїдом у X , який містить A , є весь X .

Твердження 3. *Нехай T – дерево. Тоді $A \subset V(T)$ є твірною відносно $+$ тоді й тільки тоді, коли A містить всі висячі вершини T .*

Таким чином, T -групоїд $(V(T), +)$ має єдину найменшу твірною множину, якою є множина всіх висячих вершин дерева T .

Гомоморфізмом між двома групоїдами $(X, \circ)$ та $(Y, *)$ називається відображення $f : X \rightarrow Y$ таке, що $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ для всіх $a, b \in X$. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між графами G, H називається гомоморфізмом, якщо для всіх ребер $uv \in E(G)$ виконано $f(u)f(v) \in E(H)$.

Теорема 2. *Відображення $f : V(T_1) \rightarrow V(T_2)$ між двома деревами T_1, T_2 є гомоморфізмом між їхніми T -групоїдами тоді й тільки тоді, коли f – постійне або є ін’єктивним гомоморфізмом дерев.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] L. Nebesky, *A tree as a finite nonempty set with a binary operation* // Math. Bohem. **125** (2000), 455–458.
- [2] B. Zelinka, *The lattice of all subtrees of a tree* // Math. Slovaca **27** (1977), 277–286.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kantoshyna@imath.kiev.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
 ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ
 КИЇВСЬКА ШКОЛА ЕКОНОМІКИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kyrylo.pervushyn@ukma.edu.ua

ПРОСТЕ ДОВЕДЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ОДИНИЧНОЇ ВІДСТАНІ ПРИ ПОКРИТТІ ПЛОЩИНИ ЧОТИРМА НЕПЕРЕТИННИМИ МНОЖИНАМИ, ДЕ ХОЧА Б ДВІ ВИМІРНІ

Д.А. ЧАУС

Лема 1. Нехай множина $B = B_1 \setminus B_2$, де B_1 гомеоморфна колу і має додатню міру, а множина B_2 має міру нуль. Нехай C — множина, що складається з кіл з фіксованим радіусом $r > d$, де d — діаметр множини B , і центрами в точках множини B . Тоді $C = C_1 \setminus C_2$, де C_1 гомеоморфна кільцю, а C_2 — зліченна множина точок.

Лема 2. Нехай $R^2 = \bigcup_{i=1}^3 A_i$ — покриття площини трьома неперетинними множинами, де хоча б одна вимірна. Тоді знайдуться дві точки, що належать одній множині і лежать на одиничній відстані одна від одної.

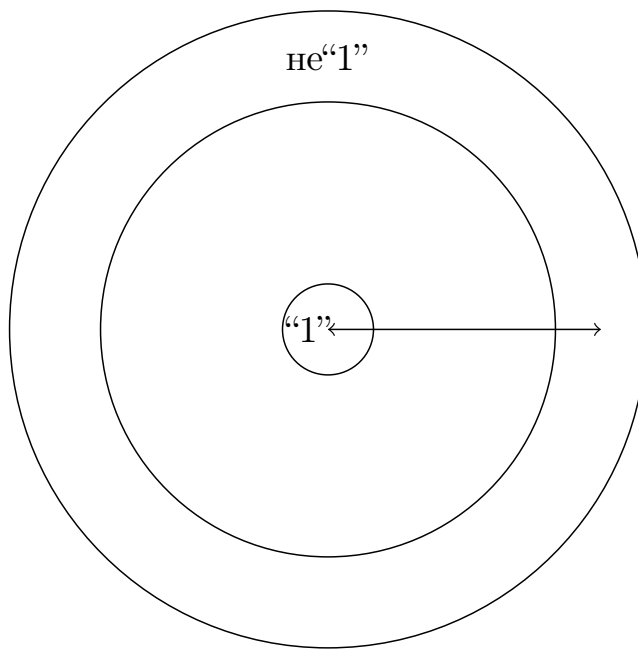


Рис. 1. Круг кольору “1” описав навколо себе область, в якій не може бути точок кольору “1” і в яку можна покласти граф з непарною кількістю вершин

Теорема 1. Нехай $R^2 = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ — покриття площини чотирма неперетинними множинами, де хоча б дві вимірні. Тоді знайдуться дві точки, що належать одній множині і лежать на одиничній відстані одна від одної.

Доведення теореми базується на використанні описаних лем: не втрачаючи загальності можна розглянути 2 круги кольорів “1” і “2”, що дотикаються і тоді у кожного з них будуть області без відповідних кольорів за лемою 1, а також в перетин цих областей можна буде вписати граф з непарною кількістю вершин по аналогії з лемою 2, який і реалізує одиничну відстань.

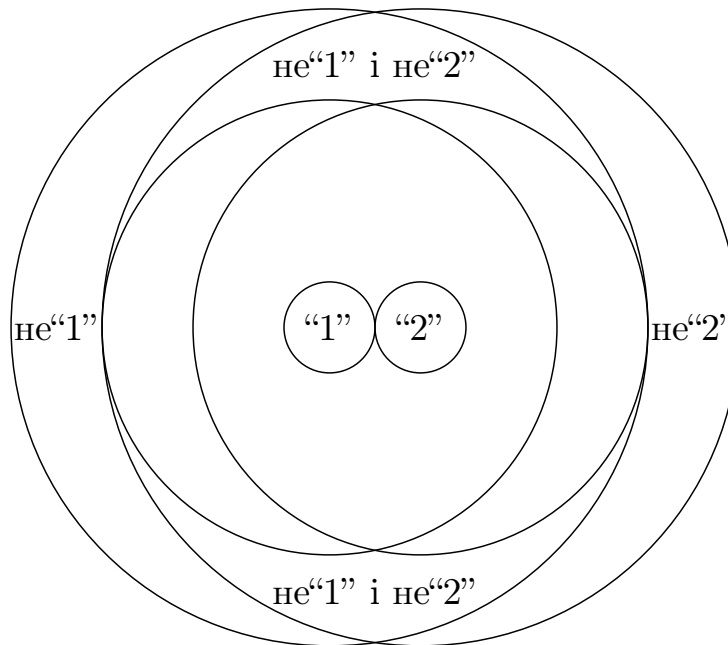


Рис. 2. Дотичні круги кольорів “1” і “2” описали область навколо, в якій не може бути жодного з відповідних кольорів і в яку можна вписати граф з непарною кількістю вершин

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ziegler, G. M. *Alexander Soifer: “The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators”*, Springer-Verlag, 2009, 607 с.
- [2] Falconer, K. J. *The realization of distances in measurable subsets covering $\mathbb{R}^n$* , J. Combin. Theory (A), **31** (1981), 187–189.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: droba20020504@gmail.com

URL: <https://matan.kpi.ua/uk/>

BOOLEAN NETWORK OPTIMIZATION BY STOCHASTIC REWIRING

K.O. CHEREVKO

In today's rapidly evolving technological world, the demand for smaller yet more powerful computers is escalating at an unprecedented pace, driving a significant need for research in circuit optimizations. This surge in demand underscores the critical role of logic synthesis, which lies at the heart of digital circuit design. Logic synthesis serves as a pivotal stage in converting a high-level functionality description into an efficient hardware implementation. It is key to meeting the ever-increasing demands for miniaturization and performance enhancement in modern electronics.

At its core, logic synthesis aims to optimize various aspects of circuit performance, including area, power consumption, speed, and delay, while ensuring the correct functionality of the circuit.

Among these optimization goals, area minimization stands out as one of the most straightforward and natural criteria. The size of a circuit directly impacts factors, such as manufacturing cost, chip area, and overall system complexity. By developing various solutions for area optimization, we address the industry's demand for producing smaller circuits, especially considering the increase in manufacturing costs of silicon chips [1].

The above-described factors prove the need for new area minimization algorithms. The contribution of this work is a novel algorithm for area minimization which is based on the notion of redundancy addition and removal. A similar approach has been used in the past, for example, [2] and [3]. However, the proposed method differs in several ways, in particular, it uses an AIG data structure for representing the circuit and relies on a simple randomization strategy to detect possible additions and removals while maintaining the correctness of the circuit. Another difference is that the proposed method targets structural change rather than immediate improvement. This is particularly important for hard-to-optimize circuits, which can be reduced only after a substantial restructuring. On top of that algorithm implementation involves various heuristics such as primary inputs prioritization and the following criterion for acceptable fanins.

Theorem 1. *Let f_n denote the function of the node n , f_i denote the function of the fanin, and f^{care} denote the care set of the node n . Let $f_1 = f_n$ represent the function before adding the fanin, and let $f_2 = f_n \wedge f_i$ represent the function*

after adding the fanin. Define $D = f_1 \oplus f_2$ as the Boolean difference after the change. Then, for the fanin to be inserted, the following property should hold:

$$D \wedge f^{care} = 0 \tag{1}$$

REFERENCES

- [1] Dr. Ian Cutress *TSMC Financial Year 2022*, <https://morethanmoore.substack.com/p/tsmc-financial-year-2022>.
- [2] Lam, T.K. and Tang, W.C. and Wei, X. and Diao, Y. and Wu, D.Y.L. *Boolean Circuit Rewiring: Bridging Logical and Physical Designs* — 2016. — 304 p.
- [3] Chih-Wei Chang and Marek-Sadowska, M. *Single-pass redundancy-addition-and-removal*. — 2001. — P. 606–609.

NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV-MOHYLA, KYIV, UKRAINE
Email address: christina.cherevko@gmail.com

ВЕРХНЯ ОЦІНКА ВІДНОВЛЮЮЧОГО СПЕКТРАЛЬНОГО ЧИСЛА ДЛЯ ГРАФІВ-КАКТУСІВ

КАРИНА ЧЕРНЯВСЬКА, ЛАРИСА ТИМОШКЕВИЧ

Різноманітні задачі відновлення для графів посідають значне місце в спектральній теорії графів (див. [1], [2], [3]).

Зваженим графом G називатимемо таку пару (G, w) , де G — це простий граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, тобто відображення множини ребер $E(G)$ у множину додатних дійсних чисел.

Постановка задачі. Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай нам відомий граф G , ми хочемо однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто потрібно аби за значеннями спектрів даних підграфів ваги на ребрах вихідного графа знаходилися однозначно. Спектр підграфа будемо називати підспектром. Мінімальну кількість таких підспектрів будемо називати відновлюючим спектральним числом графа G , позначення: $Srn(G)$.

Для графів-кактусів розглянемо поставлену задачу і наведемо верхню оцінку числа Srn . Граф-кактус — це зв'язний граф, в якому будь-які два прості цикли мають не більше, ніж одну спільну вершину. Еквівалентно, будь-яке ребро в такому графі належить максимум одному простому циклу.

Наведемо формулювання теорем, на яких базується доведення Теорема 3.

Позначимо через $cv(G)$ кількість висячих вершин дерева G . Назвемо одну з висячих вершин коренем. Через $CV(G)$ позначимо множину висячих вершин відмінних від кореня.

Теорема 1. [4, 5] *Нехай F — довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H — дерево з коренем y . Граф G — об'єднання графів F , H та ребра, що з'єднує вершини z та y . Тоді за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H)$, можна відновити ваги на ребрах графа H , вагу на ребрі (z, y) , а також $P_{\mathbf{F}}, P_{\mathbf{F}-\{z\}}$.*

Теорема 2. (оцінка Srn для дерев) [4, 5].

Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ і граф G — дерево, тоді $Srn(G) \leq cv(G)$ та для відновлення вагової функції w достатньо знати спектри таких підграфів: $\mathbf{G}$ та всіх підграфів вигляду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає множину $CV(G)$.

Теорема 3. Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ і граф G — граф-кактус, тоді $Srn(G) \leq cv(G) + 3c$, де c — кількість простих циклів у графі-кактусі. За винятком C_4 , для якого $Srn(C_4) = 4$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cvetković D.M. The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. — 1975. — 498–541. — P. 45–48.
- [2] Hogben L. Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph. Chamchuri Journal of Mathematics. — 2009. — vol 1, no. 1 — P. 51-72.
- [3] van Dam E.R., Haemers W.H. Which graphs are determined by their spectrum. Linear Algebra and its Applications. — 2003. — vol. 373. — P. 241-272.
- [4] Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі для зважених графів, Могілянський математичний журнал 2022, — том 5. — с.26-32
- [5] Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. — Київ, 2015. — 160 с.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Email address: 1211karina1211@gmail.com

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Email address: larysatymosh@gmail.com

Секція 4. «Теорії алгоритмів, інформатики»

Керівники: Глибовець Микола Миколайович, Бублик Володимир Васильович

ПЕРЕНОСЕННЯ АДАПТИВНОЇ АНОМІНІЗАЦІЇ У КОНТЕКСТІ КЛАСИФІКАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

О.В. АБАШКІН

Дана робота присвячується явищу таргетованого перенесення змагальних атак та перетину цього явища з задачею адаптивної анонімізації в контексті класифікації зображень.

Методи, засновані на глибокому навчанні, стали стандартом для різних задач комп'ютерного зору. Тим не менш, вони неодноразово демонстрували свою вразливість до різних форм порушень вхідних даних, таких як модифікація пікселів, анонімізація областей, які тісно пов'язані з змагальними атаками. У статті[1] запропонований градієнтний алгоритм що усуває вразливість класифікатору до зміни у вхідних даних і водночас приховує чутливу інформацію.

Дане дослідження, має на меті перевірити подібність переносимості адаптивної анонімізації та перенесимості змагальних атак, оскільки ці процеси є подібними у частині модифікації вхідного зображення, а, також пропонує покращення базового градієнтного алгоритму, через збільшення кількості моделей в процесі адаптації.

Вище згаданий алгоритм може бути показаний як оптимізаційна проблема:

$$\tilde{x}_{blur}^* = \operatorname{argmin}_{\tilde{x}_{blur} \in X_{x_{or}}^I} d(f_1(\tilde{x}_{blur}), f_2(\tilde{x}_{blur}), f_1(x_{or}), f_2(x_{or})), \quad (1)$$

де I - область анонімізації, а $X_{x_{or}}^I = \{ x \in X | x[i] = x_{or}[i], i \notin I \}$ множина анонімізованих зображень. Нехай $f_i : X \rightarrow [0, 1]^N$ класифікатор на основі нейронної мережі, який повертає вектор оцінок, пов'язаних із задачею класифікації на N класів.

Проміжні результати показали, що повна переносимість анонімізації не може бути досягнута базовим алгоритмом. Результати розподілені наступним чином – Відсоток вдало перенесених прикладів: MobileNetV2-050 - 32%, Resnet152 - 71%, Resnet101 - 69%, VGG16 - 29%, VGG19-BN - 36%. Покращення алгоритму має на меті досягнути кращих результатів шляхом розширення кількості моделей під час процесу адаптації.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Shvai N., Carmona A. L., Nakib A. *Adaptive Image Anonymization in the Context of Image Classification with Neural Networks*. //University Paris Est Creteil, Laboratoire LISSI, 2023. — 5074-5083 с.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, УКРАЇНА
Email address: o.abashkin@ukma.edu.ua

ПРОГНОЗНА ЦІНОУТВОРЮЮЧА МОДЕЛЬ ДЛЯ ТОВАРІВ З ХОЛОДНИМ СТАРТОМ

Р.А. ВЕЛИЧКО, С.С. ДРІНЬ

В даній роботі була розроблена ціноутворююча модель для товарів з холодним стартом за допомогою моделей градієнтного бустінгу.

Метод градієнтного бустінгу (Gradient Boosting Decision Trees, GBDT) — це ансамблевий метод машинного навчання, який використовується для вирішення завдань регресії, класифікації та інших задач. Даний метод вперше був запропонований Джеромом Фрідманом в 1999 році.

Ми маємо навчальний набір даних, який складається з n спостережень. Кожне спостереження містить інформацію про ціну товару y_i та його ознаки (назву та категорію товару). Також, нам дано певний SKU, для якого ми хочемо здійснити прогноз ціни.

Позначимо навчальний набір як (x_i, y_i) , де x_i - вектор ознак i -го товару, y_i - його ціна. Наша мета - побудувати модель $F(x)$, яка прогнозує ціну для нового SKU на основі ознак товару x .

Модель градієнтного бустінгу буде апроксимувати функцію $F(x)$ шляхом додавання слабких моделей у вигляді ансамблю. Кожна наступна модель намагатиметься покращити попередні прогнози шляхом апроксимації залишкової функції. Апроксимація

$$F(x) \approx F_0(x) + \sum_{m=1}^M h_m(x),$$

де $F_0(x)$ - це початкове базове значення, а $h_m(x)$ - вклад m -тої моделі.

Позначимо $F_m(x)$ - прогноз, зроблений моделлю після m ітерацій. При добавленні m -тої моделі, ми намагаємося мінімізувати наступну функцію втрат

$$L(y, F_{m-1}(x) + h(x)) = L(y - (F_{m-1}(x) + h(x)))^2,$$

де L - функція втрат (квадратична втрата), y - цільова змінна, $F_{m-1}(x)$ - прогноз, зроблений попередніми моделями, а $h(x)$ - нова модель, яку ми намагаємося навчити на цій ітерації.

На кожному кроці m ми шукаємо таку модель $h_m(x)$, яка мінімізує цю функцію втрат шляхом градієнтного спуску.

Градiєнт буде мати вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial(F_{m-1}(x) + h(x))} = -2(y - (F_{m-1}(x) + h(x))).$$

Отже, після M ітерацій ми отримаємо модель у вигляді ансамблю

$$F_M(x) = F_0(x) + \sum_{m=1}^M h_m(x),$$

де $F_0(x)$ - початкове базове значення (середнє значення ціни в навчальному наборі), а $h_m(x)$ - вклад m -тої моделі.

Отже, для прогнозу нової ціни для заданого SKU за допомогою цін його найближчих сусідів за допомогою GBDT, ми будемо використовувати цю модель $F_M(x)$, де x - ознаки нового товару.

Для оцінки нашої моделі використовуються MSE (середньоквадратична помилка) та MAE (середня абсолютна помилка).

Середньоквадратична помилка (MSE) вимірює середньоквадратичну різницю між фактичними (y_i) та прогнозованими ($\hat{y}_i$) значеннями ціни товару для всіх n спостережень. Формула MSE

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Середня абсолютна помилка (MAE) вимірює середню абсолютну різницю між фактичними (y_i) та прогнозованими ($\hat{y}_i$) значеннями ціни товару для всіх n спостережень. Формула MAE

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|.$$

Отже використання ансамблю слабких моделей дозволяє досягти високої точності прогнозів, а градієнтний спуск на кожній ітерації допомагає покращувати результати. Дана модель може бути корисним інструментом для вирішення задач ціноутворення та прогнозування попиту на товари.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. C. Blattberg, S. A. Neslin *Sales promotion: Concepts, methods, and strategies* // Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ — 1990.
- [2] Jerome H. Friedman. *Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine*. 1999.
- [3] S. Malik., R. Harode, A. S. Kunwar *XGBoost: A Deep Dive into Boosting*.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: r.velychko@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: svitlana.drin@ukma.edu.ua

ТИПИ ВИЩОГО ПОРЯДКУ У МОВІ ПРОГРАМУВАННЯ JAVA

Р.К. ЗАКОЛЕНКО

Мова програмування Java є однією з найпоширеніших мов у світі розробки програмного забезпечення, завдяки своїй надійності, незалежності від платформи та комплексній екосистемі. Узагальнення в Java надають можливість класу, інтерфейсу або методу працювати з довільним типом, зберігаючи відповідний механізм безпеки на етапі компіляції. Введені у Java 5 [1], узагальнення були спрямовані на усунення помилок типів під час компіляції, тим самим підвищуючи безпеку, можливість повторного використання та читабельність коду.

Конструктор типів - це властивість типізованої формальної мови, яка слугує для створення нових типів на базі інших. Наприклад, у Java, `List` - це конструктор типів. Коли йому дано параметр типу, скажімо, `Int`, він створює новий тип `List[Int]`. У свою чергу, типи вищого порядку дозволяють конструкторам типів приймати інші конструктори типів як параметри. Ця концепція добре відома в мовах, таких як Scala, де вона використовується для створення узагальненого та повторно використовуваного коду:

```
trait Functor[F[_]]:
  def map[A, B](fa: F[A])(f: A => B): F[B]

object OptionFunctor extends Functor[Option]:
  def map[A, B](fa: Option[A])(f: A => B): Option[B] =
    fa match
      case Some(a) => f(a)
      case None => None
```

У прикладі вище на Scala, `Functor` - це `trait` (схожий на інтерфейс у Java) з параметром, який є конструктором типу - `F[_]`. Функція `map`, визначена в `Functor`, є загальною для двох типів `A` та `B` і абстрагує будь-який конструктор типу `F`. Об'єкт `OptionFunctor` надає конкретну реалізацію `Functor` для `Option`. На противагу цьому, система типів та синтаксис Java не підтримують цей рівень абстракції з конструкторами типів. Для забезпечення інтеграції типів вищого роду, потрібно внести зміни до синтаксису мови та її системи типів.

Хоча Java не підтримує типів вищого роду за замовчуванням, є дослідження, які імітують цю функцію. Бібліотека *Hkt* реалізує механізм легкого поліморфізму вищого порядку [2] за допомогою процесора анотацій. Цей підхід не є дуже ефективним, адже іноді відбувається надмірне створення об'єктів. До того ж він вимагає написання надлишкового синтетичного коду, який може бути важким для розуміння та підтримки. У *Adding Type Constructor Parameterization to Java* презентується числення під назвою FGJ [3], яке формалізує систему типів, яка дозволяє параметризувати класи та методи конструкторами типів. Проте наразі немає відповідної реалізації компілятора Java.

$$\langle \text{Параметри типу} \rangle ::= "<" \langle \text{Параметр типу} \rangle \{ "," \langle \text{Параметр типу} \rangle \} ">"$$

$$\langle \text{Параметр типу} \rangle ::= \langle \text{Ідентифікатор} \rangle [\langle \text{Параметри типу} \rangle]$$

Наведена вище EBNF-нотація (*розширена нотація Бекуса–Наура*) визначає синтаксис, за допомогою якого можна описувати конструкції типів вищого порядку у мові Java, що є кроком до розширення мови та інтеграції типів вищого порядку в її систему типів. Відповідно до цієї нотації визначення **Functor** у Java може мати наступний вигляд:

```
public interface Functor<F<_>> {
    <A, B> F<B> map(F<A> fa, Function<A, B> f);
}
```

ЛІТЕРАТУРА

- [1] G. Bracha, M. Odersky, D. Stoutamire, P. Wadler. *Making the Future Safe for the Past: Adding Genericity to the Java TM Programming Language*. In *Functional and Logic Programming*, edited by Michael Codish and Eijiro Sumii, 8475:119–35. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2004.
- [2] J. Yallop and L. White. *Lightweight Higher-Kinded Polymorphism*. University of Cambridge.
- [3] P. Altherr and V. Cremet. *Adding type constructor parameterization to Java*. Accepted to the workshop on Formal Techniques for Java-like Programs (FTfJP'07) at the European Conference on Object-Oriented Programming (ECOOP), 2007.
- [4] J. Gosling, B. Joy, G. Steele, and G. Bracha. *Java(TM) Language Specification, The (3rd Edition)*. Addison-Wesley Professional, 2005.
- [5] D. Gregor, J. Jarvi, J. G. Siek, B. Stroustrup, G. D. Reis, and A. Lumsdaine. Concepts: linguistic support for generic programming in C++. In P. L. Tarr and W. R. Cook (Eds.), *OOPSLA*, pages 291–310. ACM, 2006.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ” , Київ, Україна
Email address: r.zakolenko@ukma.edu.ua

ВИКОРИСТАННЯ СУФІКСНИХ ДЕРЕВ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ПОШУКУ В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ БАЗ ДАНИХ

Д.В. ЗВАЖІЙ

АНОТАЦІЯ. Сучасні системи управління базами даних (СУБД) вимагають високої швидкості операцій пошуку для ефективного виконання бізнес-задач. Традиційні підходи індексації, такі як В-дерева та хеш-таблиці, можуть бути недостатньо ефективними для певного набору запитів. У цій доповіді буде розглянуто альтернативний підхід із використанням суфіксних дерев, які можуть значно покращити швидкість пошукових операцій[1].

Означення. *Суфіксне дерево T стрічки S довжиною t це кореневе орієнтоване дерево, що має t листків пронумерованих $1..t$. Кожна внутрішня вершина, окрім кореня, має щонайменше два ребра, кожне ребро марковане непорожнім підрядком S . Жодна вершина не може мати ребра, що починається з одного й того самого символу. Головною особливістю суфіксного дерева є те, що конкатенація маркувань на ребрах, починаючи від кореня до листка i , генерує суфікс стрічки S , починаючи з i -го символу.[2]*

Для задачі індексації потрібно працювати з колекціями стрічок, тому в таких випадках краще використовувати узагальнені суфіксні дерева. Для побудови узагальнених суфіксних дерев також використовують термінальний символ, зазвичай “\$”. Унікальність термінального символу дозволяє уникнути ситуацій, коли суфікс стає префіксом іншого суфіксу.

Також потрібно ввести набір операцій, час виконання яких потрібно покращити.

Означення 1. *Пошук стрічки (повне співпадіння) - результатом пошуку стрічки S в колекції C є всі стрічки $S_1, S_2, \dots, S_n$, кожен символ яких співпадає з кожним символом S , $S_n[0] = S[0], S_n[1] = S[1], S_n[t-1] = S[t-1]$*

Означення 2. *Пошук підстрічок - результатом пошуку стрічки S в колекції C є всі стрічки $S_1, S_2, \dots, S_n$, для кожної з яких існує таке i , що $S_n[i] = S[0], S_n[i+1] = S[1], S_n[i+t-1] = S[t-1]$.*

Означення 3. Підстрічка не входить у стрічку - результатом пошуку стрічки S в колекції C є всі стрічки $S_1, S_2, \dots, S_n$, для кожної з яких не існує такого i , що $S_n[i] = S[0], S_n[i+1] = S[1], S_n[i+m-1] = S[m-1]$.

Означення 4. Починається з - результатом пошуку стрічки S в колекції C є всі стрічки $S_1, S_2, \dots, S_n$, для кожної з яких виконується наступне $S_n[0] = S[0], S_n[1] = S[1], S_n[m-1] = S[m-1]$.

Означення 5. Не починається з - результатом пошуку стрічки S в колекції C є всі стрічки $S_1, S_2, \dots, S_n$, для кожної з яких виконується наступне

$$S_n[0] \neq S[0], S_n[1] \neq S[1], S_n[m-1] \neq S[m-1]$$

Означення 6. Закінчується на - результатом пошуку стрічки S в колекції C є всі стрічки $S_1, S_2, \dots, S_n$, для кожної з яких виконується наступне $S_n[i] = S[0], S_n[i+1] = S[1], S_n[i+m-1] = S[m-1]$, де n довжина довільної стрічки S_n та виконується $i+m=n$

Означення 7. Не закінчується на - результатом пошуку стрічки S в колекції C є всі стрічки $S_1, S_2, \dots, S_n$, для кожної з яких не виконується наступне $S_n[i] = S[0], S_n[i+1] = S[1], S_n[i+m-1] = S[m-1]$, де n довжина довільної стрічки S_n та виконується $i+m=n$

Оцінки складності для описаних вище функцій виглядатимуть наступним чином[2]:

Назва операції	Оцінка складності операції (теоретична)
Пошук стрічки	$O(m)$
Пошук підстрічок	$O(m)$
Підстрічка не входить у стрічку	$O(m)$
Починається з	$O(m)$
Не починається з	$O(m)$
Закінчується на	$O(m)$
Не закінчується на	$O(m)$

де m - довжина стрічки, що приходить на вхід функції пошуку.

Гіпотеза. Впровадження суфіксних дерев у якості ідексів для СУБД зможе знизити час, який необхідний для виконання пошукових запитів такі як: “Пошук стрічки”, “Пошук підстрічок”, “Підстрічка не входить у стрічку”, “Починається з”, “Не починається з”, “Закінчується на”, “Не закінчується на”.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Haoyu C., Ge N. Yidong H., Xuedong H., Wentao X. *Full-text search engine with suffix index for massive heterogeneous data* // Information Systems. — 2022. — С. 104.

- [2] Gusfield D. *Algorithms on strings, trees, and sequences: computer science and computational biology*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — 96 с, 123 с.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”, Київ, Україна
Email address: d.zvazhii@ukma.edu.ua

ПОБУДОВА ФРАКТАЛІВ СЕРПІНСЬКОГО МЕТОДОМ «ГРА ХАОСУ»

О.С. ЛОБАНЦОВ, А.С. ЧУЙКОВ

Килим Серпінського — це плоский фрактал, вперше описаний польським вченим Вацлавом Серпінським у 1916 році. Його можна вважати узагальненням відомої множини Кантора, яка була відкрита у 1883 році німецьким математиком Георгом Кантором. Множина Кантора є самоподібним фракталом, її розмірність Гаусдорфа дорівнює $\log_3 2$.

У математиці система ітераційних функцій (IFS) є одним із методів побудови фракталів. Він запропонований у 1981 році Джоном Е. Хатчінсоном [1]. Одним із прикладів IFS є папороть Барнслі — фрактал, створений британським математиком Майклом Барнслі і описаний ним у книзі «Фрактали скрізь» [2]. Алгоритм під назвою «Гра Хаосу» є найпоширенішим для побудови фракталів IFS. Він складається з вибору випадкової точки на площині, а потім кожна нова точка послідовності являє собою задану долю відстані між попередньою точкою і однією із вершин многокутника. Повторення цього процесу велику кількість разів, випадковий вибір вершини на кожному кроці ітерації і видалення перших декількох точок послідовності часто породжує об'єкт фрактальної природи. Наприклад, трикутник Серпінського утворюється при використанні правильного трикутника і коефіцієнта 0,5.

Нами створений візуальний застосунок для створення фракталів за алгоритмом «Гра хаосу», який дозволяє створювати прості фрактали у двовимірному (трикутник, килим та многокутник Серпінського) та тривимірному (тетраedr та куб Серпінського) просторах. У доповіді будуть представлені результати роботи цієї програми.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Hutchinson J. E. *Fractals and self similarity* // Indiana University Mathematics Journal — 1981. — V. 30, № 1. — Pp. 713–747.
- [2] Michael. F. Barnsley *Fractals everywhere* // Academic Press — 1988. — 394 p.

ВСП «Київський фаховий коледж комп'ютерних технологій та економіки Національного авіаційного університету», Київ, Україна

E-mail address: lobantsov.oleksii@gmail.com, chyikov.artem@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ АЛГОРИТМІВ МУРАШИНОЇ КОЛОНІЇ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МАРШРУТУ БПЛА

Д. Д. МЕРЕЩЕНКО

Мурахи належать до «соціальних комах». Їх поведінка заснована на процесі самоорганізації – сукупності динамічних механізмів, за допомогою яких система досягає глобальної мети за взаємодії її елементів на низькому рівні. Мурахи здійснюють обмін інформацією двома способами: прямим – обмін харчами, візуальні контакти, та непрямим – використання стигмереж. Стигмережі здійснюються за допомогою феромону – спеціального секрету, що мурахи залишають за собою як слід. Чим вище концентрація феромону на стежці, тим більше комах буде по ній рухатися. З часом феромон випаровується, що допомагає мурахам адаптуватися до змін навколишнього середовища.

Використання мурашиних алгоритмів при плануванні маршруту БПЛА

Найпростіший маршрут БПЛА можна розглядати, як рух, що починається з вихідної точки маршруту, продовжується крейсерським політом між поворотними точками та завершується виходом на об'єкт удару та зниженням до рубежу виконання завдання, тобто до кінцевої точки маршруту. Оскільки в просторі може бути дуже багато різних можливих поворотних точок, вибір найбезпечнішого та найвигіднішого маршруту БПЛА стає майже неможливим. У виборі таких точок і допомагає мурашиний алгоритм, використання якого вперше запропонував Марко Доріго в 1992 році.

Послідовність вирішення задачі

1) Задаємо параметри методу:

α — коефіцієнт, що визначає вагу феромону ($\alpha \geq 0$); β — коефіцієнт, що визначає доступність ділянки ($\beta \geq 0$); ρ — швидкість випаровування феромону ($\rho \in [0; 1]$); Q — константа, що належить до кількості феромону, який було залишено на шляху; l_i — довжина i -ї ділянки маршруту; $F_i(t)$ — концентрація феромону на i -й ділянці маршруту; L_i — доступність i -ї ділянки маршруту (обернена величина від відстані).

2) Створення популяції з m -ї кількості агентів (мурах).

3) Рух агентів. Вибір кожної наступної поворотної точки з J можливих здійснюється за допомогою ймовірнісного правила (1), що визначає

з якою ймовірністю k -й агент перейде в i -у поворотну точку з врахуванням доступності i -ї ділянки маршруту та концентрації феромону на ній в момент часу t :

$$P_i^k = \frac{F_i(t)^\alpha \cdot L_i^\beta}{\sum_{j=1}^J F_j(t)^\alpha \cdot L_j^\beta} \quad (1)$$

4) За формулою (2) визначається кількість феромону, залишеного k -им агентом на i -й ділянці маршруту:

$$\Delta F_i^k(t) = \frac{Q}{l_i} \quad (2)$$

Отриманий результат використовується для оновлення кількості феромону на кожній ділянці, пройдений k -им агентом за формулою (3):

$$F_i(t+1) = (1 - \rho)F_i(t) + \sum_{k=1}^m \Delta F_i^k(t). \quad (3)$$

5) Провівши достатньо запусків, всі агенти починають рухатися за одним оптимальним маршрутом, що і є розв'язком.

Висновок

Сфера використання алгоритмів мурашиної колонії є достатньо широкою. Зокрема, ці алгоритми допомагають при визначенні маршрутів літаків та БПЛА. В роботі був розглянутий базовий мурашиний алгоритм, але для реального планування маршрутів застосовується поліпшений max-min метод, що додатково враховує «зони небезпеки» та допомагає їх уникати. Застосування цих алгоритмів допомагає швидко вирішити, описану мною задачу, не звівши її до субоптимального рішення, чого не пропонують інші методи. Актуальність цієї теми привертає увагу все більшої кількості діячів науки, що забезпечує їй розвиток на подальші роки.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Олексенко О.О., Ярошенко Я.В. *Розробка методу оптимального маршруту польоту безпілотного літального апарату на основі мурашиного алгоритму.* // Колективна наукова монографія. — 2021. — С. 147–158.
- [2] Штовба С.Д., Рудий О.М. *Мурашині алгоритми оптимізації.* // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2004. — № 4. — С. 62–69.
- [3] Юзевич В., Крап Н. *Моделювання туристичних потоків з використанням мурашиних алгоритмів.* // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». — 2011. — С. 98–103.
- [4] Гуцул Т.В. *Огляд існуючих методів мультиагентної оптимізації.* // Журнал Містобудування та територіальне планування Київського національного університету будівництва та архітектури — 2016. — Випуск № 60. — С. 99–105.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: daniilmereshchenkoal31@gmail.com

ІТЕРАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО НЕОБУМОВЛЕНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ДЛЯ ПЕВНОЇ КАТЕГОРІЇ В РОЗДРІБНІЙ ТОРГІВЛІ

Р.О. МИРОНЕНКО, С.С. ДРІНЬ

В роботі використано ітераційний підхід для управління базовим товарним асортиментом в умовах невизначеності споживчих уподобань. В ході роботи розглядаються та застосовуються підходи портфельної теорії, задля оптимізації кількості базових SKU (товари базової необхідності). Це допоможе підвищити прибутки та зменшити витрати.

Розглянемо категорію, що складається з товарів $x_i = (x_{1i}, \dots, x_{ki})^T$, які описують відсоток від середнього продажу товару за місяць. Припускаємо, що другий момент x_i є скінченним. Вектор середніх значень - μ , а коваріаційна матриця - Σ , за умови, що $\text{rank}(\Sigma) = r \geq k$, тобто Σ також може бути сингулярною матрицею. Вектор ваг портфеля - $w = (w_1, \dots, w_k)^T$, де w_j позначає вагу j-го товару. Позначимо $\mathbf{1}$ - вектор одиниць, а I - одиничну матрицю.

Класична проблема відбору портфеля визначається як

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \mathbf{w}^T \mu = q, \quad (1)$$

де q — очікувана норма прибутку, яка вимагається від портфеля.

Якщо Σ додатньо визначена матриця, то задача оптимізації (1) має однозначний розв'язок, який задається виразом

$$\mathbf{w} = \frac{C - qB}{AC - B^2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \frac{qA - B}{AC - B^2} \Sigma^{-1} \mu,$$

де $A = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}$, $B = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu$, $C = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$. Тим не менш, якщо матриця Σ сингулярна, то задача оптимізації (1) має нескінченну кількість розв'язків. Паппас та співавтори (2010) запропонували розв'язок, який, як здається, є єдиним з мінімальною Евклідовою нормою, і отримується заміною оберненої матриці на обернену матрицю Мура-Пенроуза

$$\mathbf{w} = \frac{C - qB}{AC - B^2} \Sigma^+ \mathbf{1} + \frac{qA - B}{AC - B^2} \Sigma^+ \mu,$$

де $A = \mathbf{1}^T \Sigma^+ \mathbf{1}$, $B = \mathbf{1}^T \Sigma^+ \mu$, $C = \mu^T \Sigma^+ \mu$.

Найпоширеніші методи оцінювання μ та Σ

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i, \quad \text{and} \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \hat{\mu})(\mathbf{x}_i - \hat{\mu})^T.$$

Задача оптимізації без обмежень

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n} V(\mathbf{u}). \quad (2)$$

У загальному випадку задачі оптимізації (2) ми можемо визначити

$$V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{d}. \quad (3)$$

Формулювання методу DFPM(The Discrete Functional Particle Method) для $V(u)$ в (3)

$$\ddot{\mathbf{u}} + \eta \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{d} - \mathbf{M} \mathbf{u},$$

або, як система першого порядку

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\eta \mathbf{v} + (\mathbf{d} - \mathbf{M} \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (4)$$

Застосовуючи симплектичний метод Ейлера до (4), отримуємо

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{G} \mathbf{w}_k + \mathbf{b}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t^2 \mathbf{M} & \Delta t(1 - \Delta t \eta) \mathbf{I} \\ \Delta t \mathbf{I} & (1 - \Delta t \eta) \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\Delta t^2 \mathbf{d} \\ -\Delta t \mathbf{d} \end{bmatrix}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Levy H., Levy M. *The benefits of differential variance-based constraints in portfolio optimization* // European Journal of Operational Research — 2014. — № 234(2). — С. 372–381.
- [2] Pappas D., Kiriakopoulos K., Kaimakamis G. *Optimal portfolio selection with singular covariance matrix* // International Mathematical Forum — 2010.
- [3] Adcock C.J. *Asset pricing and portfolio selection based on the multivariate extended skew-student-t distribution* // Annals of Operation Research — 2010. — № 176. — С. 221–234.
- [4] Bodnar T., Mazur S., Podgorski K. *A test for the global minimum variance portfolio for small sample and singular covariance* // AStA Advances in Statistical Analysis — 2017b. — № 101. — С. 253–265.
- [5] Kress R. *Linear integral equations*. — Berlin: Springer, 1999.
- [6] Chincarini L.B., Kim D. *Quantitative equity portfolio management: An active approach to portfolio construction and management*. — New York: McGraw-Hill, 2006.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: r.myronenko@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: svitlana.drin@ukma.edu.ua

РАНДОМІЗАЦІЯ В РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМАХ

Д.М. САЙ, О.О. КУБАЙЧУК

Розглядається задача маршрутизації для комунікаційної мережі з топологією гіперкуба. Нехай m - бітова розрядність адреси вузла (розмірність, діаметр гіперкуба). Ребро між вузлами існує тоді й тільки тоді, коли адреси вузлів відрізняються рівно одним бітом. Кожен з $n = 2^m$ вузлів (routing switches) є відправником та отримувачем одного з n пакетів. Мережа працює синхронно, кроками. Вузли підтримують черги для зберігання пакетів, які очікують на відправку.

До гіперкуба застосовна схема маршрутизації за якої маршрут повідомлення повністю визначається адресами відправника та отримувача - схема виправлення бітів (bit-fixing algorithm). У [1] доведено нижню асимптотичну оцінку складності для будь-якого детермінованого алгоритму маршрутизації з відсутністю післядії - $\Omega(\sqrt{2^m}/m^{3/2})$. Валіант у [2] запропонував рандомізований алгоритм маршрутизації та оцінив ймовірність його успішного завершення. Алгоритм Валіанта використовує схему виправлення бітів і складається із двох послідовних фаз доставки.

Як наслідок теореми з [2], теореми 4.12 з [3] для мережі з топологією гіперкуба доведено наступний факт.

Теорема 1. *Нехай випадкова величина ξ -число кроків, необхідних алгоритму Валіанта для доставки всіх пакетів за призначенням. Тоді, $\exists L > 0$ таке, що $M\xi \leq Lt$, де m - бітова розрядність адреси вузла.*

Наслідок 1. *За означенням відношення "О" складність алгоритму Валіанта $O(m)$ в середньому.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Borodin, Hopcroft J.E. *Routing, merging and sorting on parallel models of computations.* // Journal of Computer and System Sciences — 1985. — Т. 30, № 1. — Р. 130–145.
- [2] Valiant L.G. *A scheme for fast parallel communication.* // SIAM Journal on Computing — 1982. — Т. 11, № 2. — Р. 350–361.
- [3] Mitzenmacher M., Upfal E. *Probability and Computing. Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — Р. 352.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: denissaj@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: o.kubaichuk@kpi.ua

ПЕРЕДБАЧУВАЛЬНА АНАЛІТИКА В МЕДИЦИНІ

Є.Б. ФІСУН

Передбачувальна аналітика має величезний потенціал для розвитку в галузі медицини. Аналізуючи складні закономірності в медичних даних (генетичних профілях), прогностичні моделі можуть ідентифікувати людей із високим ризиком розвитку захворювань ще до появи симптомів, визначити які гени більш за все провокують хворобу.

Незважаючи на те що передбачувальна аналітика дає багато можливостей для розвитку індустрії охорони здоров'я, вона стикається з низкою проблем пов'язаних з даними, а саме складність та варіативність, оскільки лікарі збирають повний анамнез, що включає багато різних атрибутів, які можуть впливати на стан хворого. Медичні дані дуже часто можуть містити помилки, бути неповними, окрім цього відсутні дані для конкретних хвороб, груп (stratified sampling problem), що у свою чергу впливає на точність передбачувальної моделі.

Одними з способів як можна вирішити проблему маленьких вибірок є генерація нових семплів, за допомогою bootstrapping або jackknife. Оскільки медичні дані мають багато предикторів, то застосовуються feature selection алгоритми (filter or wrapper methods) завдяки яким можна виділити найважливіші показники, що пояснюють залежну змінну. В охороні здоров'я частою задачею є аналіз виживання, тобто нас цікавить час до визначеної події (рецидив, смерть), такі дослідження характеризуються наявністю censored data що робить некоректним використання традиційних методів (наприклад логістична регресія) для передбачення скільки часу ще проживе індивідум, для даної задачі варто застосовувати Kaplan-Meier analysis, Cox regression.

У роботі було проаналізовано комбінований датасет експресії генів людей та мишей, двох груп (хворі на ангельман синдром та контрольна група). Загалом вибірка складається з 60 семплів та 2399 генів. Для візуалізації експресії генів було використано heatmap. За допомогою heatmap ми можемо, які гени мають більш високу експресію (червоний колір), а які більш низьку (синій). Було проведено ряд експериментів, для покращення точності класифікатора, а саме застосування фільтраційних методів коефіцієнт взаємної інформації

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}$$

та тест Колмогорова-Смірнова щоб визначити чи є значні відмінності між генами хворих та здорових кандидатів [1].

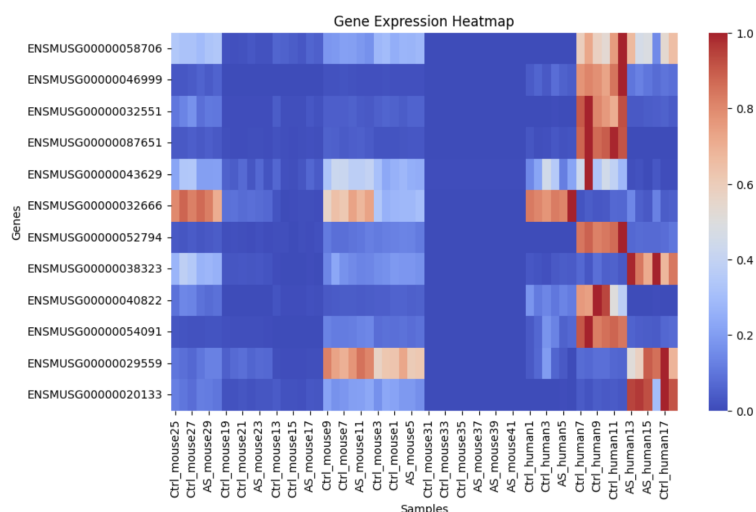


Рис. 1. Heatmap of gene expression data

Також був застосований wrapper method (рекурсивне усунення ознак) для виявлення найбільш вагомих ознак. Окремо від алгоритмів для визначення значних ознак було зменшено розмірність датасету за допомогою PCA [2]. Потім було вирішено підійти до цієї проблеми зі сторони даних та збільшити кількість семплів за допомогою bootstrapping, а потім зробити semi-supervised learning для нерозмічених даних та натренувати фінальний класифікатор.

Підсумовуючи у роботі було показано, що класичні методи машинного навчання не працюють для передбачувальної аналітики, це характеризується специфікою даних, оскільки ми маємо малу вибірку та багато незалежних змінних ми стикаємось з проблемою перенавчання.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Aliaa El-Gawady, Mohamed A. Makhoul та інші. *Machine Learning Framework for the Prediction of Alzheimer's Disease Using Gene Expression Data Based on Efficient Gene Selection* // MDPI — 2022.
- [2] Olutomilayo Olayemi Petinrin, Faisal Saeed, Naomie Salim та інші. *Dimension Reduction and Classifier-Based Feature Selection for Oversampled Gene Expression Data and Cancer Classification* // MDPI — 2023.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: yelyzaveta.fisun@ukma.edu.ua

SOLVING CLASSICAL (SYSTEMS OF) LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS USING NON-CLASSICAL METHODS OF COMPUTER MATHEMATICS

A.O. TSUKANOVA

Since the beginning of time people have made some optimal, more or less, decision, based only on pure human experience. Over time it was no longer possible to realize this action without special mathematical methods that carry out global search for necessary optimum. Nowadays, in crazy time of global computerization, these methods allow us to take, in fact, innovative look at some complicated problems of classical mathematics. The given paper presents basic results of analysis of well known classical Gauss method (or Gaussian elimination method) [1, 2] and new optimization method of gradient descent [3] for solving general systems of linear algebraic equations, obtained after testing our own program, written in «Visual Basic for Applications».

The essence of proposed numerical optimization method of gradient descent is that solving an arbitrary system of the form $A\vec{x} = \vec{b}$ is reduced to searching of minimizer $\vec{x}^*$, i.e. such vector, that $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*)$, for the next function

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x} - \vec{b}, A\vec{x} - \vec{b}) = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2,$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m, m \leq n.$$

Formally, this method consists in iterative generation of some sequence of such points $\{\vec{x}_k\}_{k \geq 0}$, i.e. some descent trajectory, that is sometimes called a *relaxation trajectory*, that converges to our real solution $\vec{x}^*$ while $k \rightarrow \infty$, that $f(\vec{x}_{k+1}) \leq f(\vec{x}_k)$, $k \geq 0$, according to the following iterated scheme.

- (1) An arbitrary point is selected as an initial approximation $\vec{x}_0$.
- (2) The approximation $\vec{x}_{k+1}$, $k \geq 0$, is determined by the formula

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \lambda_k \vec{g}_k, \lambda_k > 0, k \geq 0,$$

where $\vec{g}_k = \text{grad}(f(\vec{x}_k))$, $k \geq 0$.

At each step we have movement along the vector of anti-gradient, in the direction of the fastest decrease of f , and, as a result, we get our necessary solution. Namely, if it turns out that the modulus of our anti-gradient is zero (less than predetermined accuracy), then we are at the minimum point we are looking for. If the criterion for the end of the iteration is not true (the modulus of our anti-gradient is more than predetermined accuracy), then we

return to the first step, otherwise we return the exact value of $\vec{x}_{k+1}$, $k \geq 0$. In this formula λ_k , $k \geq 0$, determines the distance between $\vec{x}_k$ and $\vec{x}_{k+1}$, $k \geq 0$. This distance is usually called *the step* of the proposed gradient scheme.

The main problem in the process of choosing this step λ_k , $k \geq 0$, is to ensure that the inequality $f(\vec{x}_{k+1}) \leq f(\vec{x}_k)$, $k \geq 0$, is true. There are different ways to choose this step multiplier λ_k , $k \geq 0$. Depending on this, different variants of numerical optimization method of gradient descent can be obtained. We have considered the next four variational methods: *the method with adaptive step selection*, *the method with adaptive step correction*, *the modified descent method with adaptive step selection*, and *the fastest descent method*. All these methods contribute to the accelerated approximation of our converging sequence of points $\{\vec{x}_k\}_{k \geq 0}$ to necessary real solution $\vec{x}^*$ we are looking for.

The main idea of the proposed method is to optimize, that is, to move to minimum in the direction of the fastest descent, and this direction is given by the vector of anti-gradient $grad(f(\vec{x}_k))$, $k \geq 0$. In details, we choose some starting point in an arbitrary way, calculate the gradient of the considered function in this point, and take some small step in the opposite, anti-gradient, direction. As a result, we arrive to some point where the value of our function is less than the value in the previous point. At this new point we repeat the mentioned procedure: we again calculate the gradient of the function and take a step in the opposite direction. Continuing this process, we move towards the decreasing function. The relaxation sequence is built, according to the following mathematical conclusions: due to special choice of the direction of our movement, reducing the value of our function at each step, when moving from the first point $\vec{x}_k$, $k \geq 0$, to the second point $\vec{x}_{k+1}$, $k \geq 0$, we approach the minimum. Since at each step we move along the vector of anti-gradient, in the direction of the fastest decrease of our function f , thus, as a result, we will finally arrive to our necessary explicit solution we are looking for. After testing various systems of linear algebraic equations with the help of our program, it was found that the Gaussian method algorithm gives results in a fraction of seconds, while proposed optimization method produces the most accurate result in a short time not for every system. This fact experimentally proves that effectiveness of this descent method depends on value of its chosen step.

REFERENCES

- [1] Axler S. *Linear Algebra Done Right (Undergraduate Texts in Mathematics)*. — Springer, 2015. — 357 p.
- [2] Shores T.S. *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis (Undergraduate Texts in Mathematics)*. — Springer, 2018. — 491 p.
- [3] Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О. Г. *Задачі, методи і алгоритми оптимізації: Навчальний посібник*. — Рівне: НУБГП, 2011. — 624 p.

IGOR SIKORSKY KIEV POLYTECHNIC INSTITUTE, KIEV, UKRAINE
 Email address: shugaray@mail.ru

Секція 5. «Історії математики та методики навчання математики»

Керівники: Шкільний Олександр Володимирович, Гончаренко Яніна
Володимирівна

МАРІ СОФІ ЖЕРМЕН

Ю.Ю. БОНДАРЕНКО, Т.В. МАЛОВІЧКО

Марі Софі Жермен (1776 – 1831) – видатна французька жінка-математик. Вона народилася 1 квітня 1776 р. у Парижі. Одержала домашню освіту. Математикою зацікавилася в 13 років, коли під час Французької революції знайшла прихисток у бібліотеці батька. Легенда про смерть Архімеда через захоплення математикою, надихнула її на те, щоб присвятити своє життя цій науці [1].

Батьки її не підтримали, хвилюючись за її здоров'я. На ніч вони відключали тепло і світло в її спальні і забирали її одяг. Жермен вдавала, що виконує вимоги, але вночі загорталася у ковдри, запалювала заховані недогарки свічок і всю ніч працювала над книгами. Одного ранку батьки побачили, що вона спить за письмовим столом, дошка вкрита розрахунками, а чорнило замерзло. Після цього вони послабили опір [2], [3].

Задля математики вона самостійно вивчила грецьку мову та латину. Коли в Парижі відкрилася Центральна школа суспільних наук Софі вдалось отримати конспекти декількох курсів, зокрема і аналізу, що викладав Лагранж. В кінці курсу студенти повинні були здавати письмові роботи. Жермен знайшла колишнього студента Леблана та подала свої спостереження на перевірку Лагранжу під його іменем. Професор був вражений її оригінальністю та навіть публічно похвалив цю роботу. Після розшуків з'ясувалося, що геніальним Лебланом виявилась Софі Жермен. Після цього Лагранж став її математичним наставником і вони часто листувались. Також вона зав'язала листування ще з деякими вченими.

Софі зацікавилася конкурсом Паризької академії наук, щодо експериментів Хладні з вібруючими металевими пластинами. Метою конкурсу було «надати математичну теорію вібрації пружної поверхні та порівняти цю теорію з експериментальними доказами». Жермен подала свою статтю у 1811 р. і не отримала премії. Лагранж зміг використати її роботу, щоб вивести своє рівняння. Журі перезапустило конкурс. Жермен продемонструвала, що рівняння Лагранжа справді дало закономірності Хладні в кількох випадках, але не могла дати задовільного виведення його рівняння з фізичних принципів. За цю роботу вона отримала почесну відзнаку. Коли конкурс відновився втретє, Жермен знову прийняла в ньому участь. Її робота була визнана гідною медалі, хоча недоліки в її математичній строгості залишились [2].

Жермен найбільш відома дослідженням останньої теореми Ферма, що стверджує, що рівняння $x^p + y^p = z^p$ не має розв'язків в ненульових цілих числах при $p > 2$. Твердження, що це рівняння не має розв'язків в ненульових цілих числах, жодне з яких не ділиться на p , називається першим випадком теореми Ферма.

Теорема (Софі Жермен). *Нехай для простого числа $p \geq 3$ існує таке ціле число n , що*

- (1) *число $q = 2np + 1$ є простим числом;*
- (2) *серед p -х степенів по модулю q немає сусідніх;*
- (3) *число p не є p -м степенем за модулем q .*

Тоді для будь-якого розв'язку рівняння $x^p + y^p = z^p$ в цілих числах p^2 є дільником x , y або z . Зокрема, для показника справедливий перший випадок теореми Ферма [1].

План Жермен полягав у тому, щоб довести, що кожне просте число $p \geq 3$ має безліч допоміжних простих чисел $2np + 1$ таких, серед ненульових p -х степенів по модулю q немає сусідніх. Тоді, якби x , y та z були розв'язками рівняння Ферма для показника p , то кожне з нескінченної кількості допоміжних простих чисел мало б ділитися на одне з чисел x , y або z . Якщо розглянути три підмножини допоміжних простих чисел, що діляться на x , y та на z відповідно, то хоча б одна з таких підмножин мала б бути нескінченною. Це означало б, що одне з чисел x , y або z було б кратним нескінченній кількості простих чисел, що неможливо, а отже, рівняння Ферма не могло б мати розв'язків для показника p . Однак Жермен писала Гауссу, що не змогла встановити існування нескінченної кількості допоміжних простих чисел навіть для одного простого показника степеня. Тим не менш це був перший випадок, коли хтось розробив план доведення останньої теореми Ферма для нескінченної кількості простих показників степеня, а не для кожного окремого випадку[4].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Alkalay-Houlihan C. *Sophie Germain and Special Cases of Fermat's Last Theorem* // <https://www.math.mcgill.ca/darmon/courses/12-13/nt/projects/Colleen-Alkalay-Houlihan.pdf>
- [2] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Germain/>
- [3] Hill A.M. *Sophie Germain: A Mathematical Biography* // <http://hdl.handle.net/1794/8965>
- [4] Riddle L. *Sophie Germain and Fermat's Last Theorem*— Agnes Scott College, 2009. // <http://www.agnesscott.edu/Lriddle/women/germain-FLT/SGandFLT.htm>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: yulia01.07.2006@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tatianamtv@protonmail.com

ІННОВАЦІЙНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ ДРОБІВ: ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

І.В. ВОЛОШКО

У цій статті ми розглянемо інноваційні підходи до викладання дробів, зокрема використання інтерактивних технологій та мультимедійних ресурсів, що сприяють покращенню розуміння та засвоєнню цієї важливої математичної теми.

Мета досліджень

Оцінка ефективності технологічних інструментів; наскільки ефективно технології, такі як комп'ютерні програми, веб-сайти, мобільні додатки тощо, допомагають у вивченні дробів порівняно з традиційними методами.

Завдання дослідження

Оцінка ефективності використання технологій у викладанні дробів та їх вплив на навчальний процес та результати учнів. Аналіз різних технологічних інструментів, таких як відеоуроки, інтерактивні вправи, спеціалізовані програми тощо, зокрема їх вплив на розуміння та засвоєння матеріалу, мотивацію учнів та підвищення їх зацікавленості у предметі.

Виклад основного матеріалу

Швидкий розвиток технологій та цифровізація сучасного світу змушують сферу освіти адаптуватися до нових вимог. Одним з ключових інструментів цифрової трансформації є платформи для створення онлайн-курсів, які впливають на спосіб навчання та філософію освіти. В Україні спостерігається зростання ініціатив, спрямованих на розвиток онлайн-освіти: використання цифрових платформ для різних курсів, формування електронних підручників, впровадження навчальних інтерактивних ігор тощо. Це призводить до змін у підходах викладання в українських школах, що збільшує гнучкість, інтерактивність та якість освітнього процесу. Однак, для успішної інтеграції цифрових технологій, важливо враховувати доступність навчальних можливостей для всіх учнів та розвиток цифрової грамотності [1, с.100-108]. Інтерактивні дошки, комп'ютери та інформаційні технології – це зручні засоби, які, сполучаючи педагогічну

вправність, можуть внести новизну у навчальний процес, збільшити зацікавленість учнів у здобутті знань і значно спростити завдання викладача щодо підготовки до занять. Компонентами інтерактивної дошки є комп'ютер, мультимедійний проектор, програмне забезпечення та екран, який виступає як платформа для дошки.

Аналіз ефективності

У першому питанні йшла мова про частоту використання інтерактивних дошок або мультимедійних інструментів під час уроків з дробами. За результатами анкетування, більшість вчителів використовують ці інструменти час від часу (50%), але також є частка вчителів, які використовують їх рідко або ніколи (30%). Можемо зробити висновок, що існує певний рівень використання інтерактивних інструментів у навчальному процесі з дробами, але є потенціал для більш широкого впровадження цих технологій. У другому питанні ми запитували, як, на думку вчителів, інтерактивні інструменти, такі як інтерактивні дошки, допомагають учням краще розуміти дробі. Результати показали, що більшість вчителів вважають, що ці інструменти значно покращують зрозуміння дробів (40%) або допомагають трохи (30%). Однак є і частина вчителів, які вважають, що ці інструменти мають мінімальний вплив (30%). Такий розподіл думок показує певний позитивний ефект від використання інтерактивних інструментів, але також свідчить про можливості для подальшого вдосконалення використання цих технологій у навчальному процесі з дробами. У третьому питанні йшла мова про сприйняття вчителями збільшення зацікавленості учнів під час використання інтерактивних ігор або завдань з дробами. За результатами анкетування, більшість вчителів відмітили помітне збільшення зацікавленості учнів (60%). Це свідчить про ефективність використання інтерактивних методів у навчальному процесі з дробами та їхній позитивний вплив на мотивацію учнів. У четвертому питанні аналізувалося ставлення вчителів до розбиття концепцій дробів на прості кроки з використанням технологій. Більшість вчителів (70%) однозначно підтримують думку про те, що цей підхід сприяє кращому засвоєнню матеріалу учнями. Це підтверджує важливість структурованого навчання та використання візуальних матеріалів для полегшення розуміння складних концепцій.

Висновки

Аналіз питань показує, що використання технологій у навчанні дробів відзначається певними позитивними тенденціями. Більшість вчителів відзначають покращення у засвоєнні концепцій дробів та вплив спільних завдань на підготовку до уроків. Також вони усвідомлюють важливість постійного професійного розвитку у використанні технологій та стикаються з викликами при впровадженні цих технологій. Однак деякі вчителі

відчувають, що традиційні методи можуть бути ефективнішими, що свідчить про необхідність додаткової підтримки та навчання у використанні технологій для досягнення їхнього повного потенціалу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Білик Т. С. *Інтеграція інноваційних елементів та інтерактивних технологій на уроках математики в початковій школі*. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. — № 61, 2021. — С. 100–108.
- [2] Кондратова Л. Г. *Використання мобільних додатків Google в роботі*. 2017. — № 2. — С. 66–72.

Волинський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: ira.voloshko21@gmail.com

СПАДЩИНА УКРАЇНСЬКИХ МАТЕМАТИКИНЬ

Є.В. КИЯНИЦЯ, О.О. КУБАЙЧУК

Світова статистика свідчить про те, що лише 28 відсотків науковців — жінки, згідно з даними Інституту статистики ЮНЕСКО. Проте, Україна демонструє прогресивні тенденції в цьому питанні, адже кількість жінок серед науковців сягає 46 відсотків, що дозволяє посісти 12 місце в рейтингу за цим показником серед 41 країн світу [1]. На жаль, більшість населення України навіть не цікавиться вкладом українських жінок у науку, тому ця тема є дуже актуальною і ми маємо її розглянути. Прикладом визначних українських науковиць у сфері математики є:

1. Софія Олександрівна Яновська

Народилась 31 січня 1896, впровадила новий напрям у науковому дослідженні, формуючи власну школу методології наукового знання. Вона поєднувала теоретичні дослідження з популяризацією наукових знань, викладання особливостей математичної логіки з метою зробити досягнення науки доступними для широкої аудиторії [2]. Науковиця має більш ніж 40 друкованих наукових робіт. Акцентуючи на питаннях методології математики та логіки, Софія Олександрівна здійснила значний внесок у підвищення рівня математичної освіти та культури в нашій країні.

2. Клавдія Яківна Латишева

Народилась 14 березня 1897 року, науковиця математикиня, перша українка, яка захистила дисертацію та ступінь кандидата фізико-математичних наук. Одне з її найбільших досягнень — метод Фробеніуса-Латишевої для розв'язання систем диференціальних рівнянь з частинними похідними [3, ст. 317]. Суть методу полягає в розкладанні шуканих функцій у ряди за малим параметром. Цей метод дозволяє знаходити точні або наближені розв'язки ДРЧП, які не можна розв'язати аналітично іншими методами.

3. Катерина Логвинівна Ющенко

Народилась 8 грудня 1919 року, вчена у галузі кібернетики та доктор фіз-мат. наук. Членкиня Міжнародної академії комп'ютерних наук, дворазова лауреатка Державної винагороди України, винагороди НАН України імені Глушкова, а також нагороджена орденом Княгині Ольги. Катерина Ющенко є автором першої мови програмування “Адресна мова програмування”, розробила перші програми для першого комп'ютера

створеного в НАН України. Протягом 40 років роботи в Інституті кібернетики віддавалася створенню школи теоретичного програмування. Її “Адресна мова програмування” випередила на час свого виникнення такі відомі мови, як Фортран, Кобол і Алгол. Її дослідження були одними з перших кроків у створенні штучного інтелекту, а на базі “Адресної мови програмування” були створені перші програми розпізнавання образів, включаючи геометричні фігури та символи. На жаль, радянська влада перервала розвиток цієї мови, заборонивши подальше дослідження та публікацію наукових робіт з цього напрямку. Однак “Адресну мову програмування” використовували у пострадянських країнах ще понад 10 років після цього. [4, сл.7]

4. Ольга Арсенівна Олійник

Народилась 2 липня 1925 року, видатна вчена-математик. Вона здобула вищу освіту з відзнакою в мехматі, де навчалась під керівництвом професора Софії Яновської. Її активну наукову діяльність охопили такі галузі, як диференціальні рівняння, фізика рідин та газів у пористих середовищах, математична теорія пружності та топологія. Напрацювання Ольги визнані не лише в Україні, але й за її межами, вона отримала численні нагороди та визнання за свої досягнення. Також її науковий внесок був відзначений іноземними науковими установами, зокрема Італійською Академією наук та Единбурзьким королівським товариством у Великобританії. Понад 350 наукових праць належать Ользі Арсенівні, також підготовка 56 кандидатів та 14 докторів наук. [2]

5. Сита Галина Миколаївна

Народжена 29 січня 1940 року, є видатною науковицею в галузі математики та відомим фахівцем в теорії випадкових процесів та функціональних просторах. Вона спеціалізується на дослідженні граничних теорем теорії випадкових процесів та асимптотичних оцінок мір у функціональних просторах. Її науковий доробок налічує понад 25 публікацій, які роблять значний внесок у теорію ймовірностей. Також, поза науковою сферою, Галина сита відзначається активною діяльністю в увіковіченні пам'яті великих українських математиків. Її внесок у вивчення історії математики надзвичайно значний, що підтверджується понад 50 публікаціями в цій галузі.[2]

6. Дубинчук Олена Степанівна

Народжена 21 травня 1919 року, відома як талановитий математик, науковець і педагог. Вона проявляла зацікавленість у проблемах теорії й історії педагогіки, методиках викладання математики в школах і професійних училищах, організації навчально-виховного процесу, міжпредметних зв'язках та індивідуалізації навчання. Велику увагу приділяла роботі концепції математичної освіти в Україні. Дубинчук була автором

понад двохсот наукових праць, включаючи підручники, навчальні посібники, збірники задач, тематично-поурочні плани та статті. Її концепція безперервної професійної освіти, ґрунтуючись на сучасних освітніх трендах, водночас враховувала й унікальні потреби та перспективи розвитку української держави, роблячи значний внесок у цю сферу. Крім того, вона є авторкою кількох підручників, які використовуються в навчальних закладах України та поза її межами. [5]

Висновок

Це лише декілька прикладів з багатьох видатних українок, які зробили значний внесок у розвиток математики. Їхня спадщина є свідченням їхньої інтелектуальної сили, стійкості та відданості своїй справі. На прикладах вищезгаданих дослідниць ми можемо побачити, що вони зробили значний внесок у розвиток математичної науки на території України. Нам слід знайомитись з іншими українськими науковицями, популяризувати їхні здобутки та розповідати про них світові. Це не лише сприятиме розвитку науки в Україні, але й дасть змогу новим поколінням українців пишатися своїми співвітчизницями та черпати з їхніх досягнень натхнення для власних звершень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Європейський Благодійний Фонд “Єдність за майбутнє”. *Це зробили вони. Цікаві факти про жінок у науці до Всесвітнього дня науки* [вебресурс]. URL: <https://www.ednist-fond.com.ua/2019/11/08/women-in-science/>.
- [2] Гульман Олександр Володимирович. *Жінки - математики України - 2018 рік* [вебресурс]. URL: <https://vseosvita.ua/library/embed/01000pr4-86d5.doc.html>.
- [3] Історія освіти, науки і техніки в Україні. *Матеріали XIV Всеукраїнської конференції молодих учених та спеціалістів, 17 травня 2019 р.* - Київ: 2019. - С. 317-320 [електронний ресурс]. URL: <https://dnsgb.com.ua/assets/files/2023/08/obkl-zbirnyk-konf-2019.pdf>.
- [4] Кучинська Т. В. *Жінки-математики в колі часу* [презентаційні матеріали]. URL: https://uu.edu.ua/upload/0svita/Navch_metod_d_t/Cikavo_pro_disciplini/Zhinki_v_matematici.pptx.
- [5] Олена Степанівна Дубинчук (1919 – 1994), видатний науковець-педагог, до 100-річчя від дня народження. Київ: Інститут педагогічної освіти й освіти дорослих імені Івана Зязюна НАПН України, 2019. - С. 5-25 [електронний ресурс]. URL: https://lib.iitta.gov.ua/716896/1/Dubynchuk_buklet2019.pdf.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: kiyanitsa.elizaveta@l111.kpi.ua